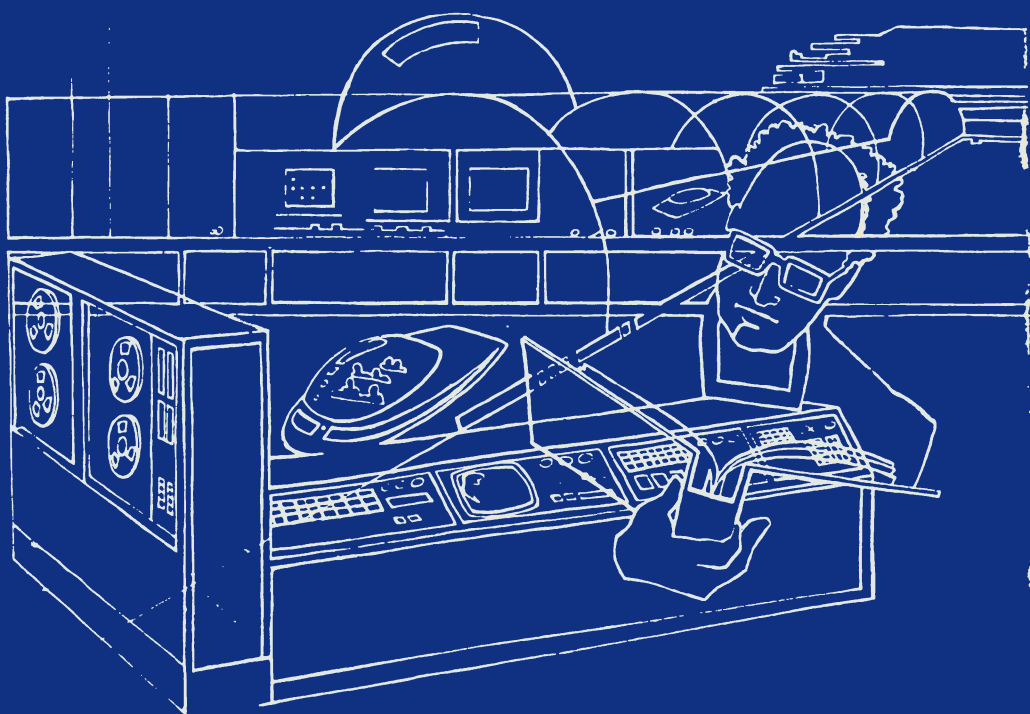


В. Н. Бурков

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АКТИВНЫХ СИСТЕМ



ИЗДАТЕЛЬСТВО • НАУКА •



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
МИНИСТЕРСТВО ПРИBOROСТРОЕНИЯ,
СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ
И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СССР

Ордена Ленина Институт проблем управления

В. Н. БУРКОВ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АКТИВНЫХ СИСТЕМ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1977

Б у р к о в В. Н. Основы математической теории активных систем. М. «Наука», 1977 г., с. 255.

В книге рассмотрены модели организационных систем, используемые для анализа и оценки механизмов функционирования в системе народного хозяйства. Даются постановки задач управления в экономике и методы их решения.

Ил. 28, список лит.—55 назв.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

Ю. Н. ИВАНОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Совершенствование управления системами самого различного вида (предприятие, институт, школа, военные организации, международные организации, народное хозяйство, государство), пожалуй,— одна из актуальных и популярных проблем сегодняшнего дня. Такие системы часто называют организационными, поскольку речь идет об организации деятельности коллектива людей для достижения определенных целей. Практика организационного управления накопила достаточно приемов эффективного управления от правил воспитания в семье и школе до принципов управления экономикой, армией и т. д. Однако до сих пор управление организациями во многом остается более искусством, чем наукой. Дело в том, что поведение человека (коллектива) в организации определяется целым рядом факторов морального, материального, престижного, психологического характера, что приводит к значительным трудностям построения адекватных моделей. Присутствие человека приводит к определенной активности системы [1]. Проявления этой активности многообразны. Наиболее существенными представляются сознательное искажение информации о своих возможностях, потребностях и целях (так называемые «активные помехи» при передаче информации), а также снижение эффективности работы при отсутствии достаточных стимулов или выполнение совсем не той работы, которая предписана. Так, ученик, играющий в футбол вместо того чтобы делать уроки, проявляет «активность», не свойственную автомату. Начальник отдела снабжения завода, сообщаящий завышенную заявку на дефицитные материалы (зная, что она будет «урезана») вносит активные помехи в систему снабжения. Принятие заниженных встречных планов, невыполнение планов по новой технике, завышение сроков реализации проектов, затрат на их реализацию и, наоборот, соревнование за повышение качества, количества и снижение себестоимости — все это примеры активности экономических систем. Формализация ряда отмеченных свойств и привела к понятию «активный элемент» и «активная система» (система, в которой объектами управления являются активные элементы). На содержательном уровне определения активным называется элемент, имеющий цели (интересы), способный искажать информацию и работать с разной эффективностью (в соответствии со своими интересами). С математической точки зрения теорию активных систем можно рассматривать как раздел теории игр, однако яркая содержательная направленность этой теории заставляет выделить ее в отдельное

направление. Достаточно привести ряд терминов (план, реализация плана, закон управления, механизм функционирования и др.), чтобы стало ясно, что речь идет о теории управления организационными (в основном экономическими) системами. Главная задача, решаемая в теории активных систем — построение эффективных организационных (хозяйственных) механизмов (законов стимулирования, процедур планирования, принципов организации соревнования, распределения премий и т. д.).

Уже имеющийся опыт применения методов теории активных систем в различных областях народного хозяйства (системы стимулирования и планирования предприятий, управление научно-исследовательскими организациями, управление ремонтом драг на приисках и др.) убедительно показывает, что она является эффективным инструментом исследования хозяйственных механизмов и разработки рекомендаций по их совершенствованию.

Книга является первой попыткой обобщения и систематизации результатов по теории активных систем по 1975 г. включительно. Она состоит из двух разделов. Первый — содержит популярное изложение идей и задач управления активными системами и предназначен для широкого круга читателей. Второй — дает строгое последовательное изложение теории двухуровневых активных систем, начиная с определения основных понятий, постановки задач управления и кончая изложением ряда общих результатов.

В книге принята следующая система индексации. Формулы индексируются двойным номером (номер параграфа и номер формулы). Такую же индексацию имеют упражнения. Если в тексте делается ссылка на формулу из другой главы, то впереди добавляется номер главы. Например, (7.2.3) — формула (2.3) главы VII. Рисунки индексируются также двумя числами — номер главы и номер рисунка. Такую же индексацию имеют теоремы и леммы.

Книга во многом отражает содержание курса «Теория управления организациями», читаемого автором в течение ряда лет студентам факультета радиотехники и технической кибернетики Московского физико-технического института.

Пониманию проблем и принципиальных особенностей управления организационными системами в значительной степени помогли критические замечания академика АН СССР В. А. Трапезникова, чл.-кор. АН СССР С. В. Емельянова, чл.-кор. АН СССР Н. Н. Моисеева, проф. М. А. Айзермана, проф. А. Ашимова, проф. К. А. Багриновского, проф. Ю. Б. Гермейера, проф. Ю. Н. Иванова.

Большую помощь в оформлении и подготовке рукописи оказали И. А. Доронькина, А. С. Шмелева, И. В. Буркова и многие другие.

Всем помогавшим в работе над книгой автор приносит глубокую и искреннюю благодарность.

Раздел I

АКТИВНОСТЬ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель данного раздела — дать представление о проблематике теории активных систем. На примере элементарных моделей экономических систем удастся, избегая вычислительных трудностей, сохранить принципиальные особенности решаемых задач.

Глава I

ЗАДАЧА ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ

§ 1. Описание модели

Рассмотрим систему, состоящую из планирующего органа (центра) и n предприятий-производителей однородной продукции (элементов). Будем исследовать функционирование системы в дискретные периоды (месяц, квартал, год). В каждом из них задача центра — назначить план каждому предприятию при условии, чтобы суммарный выпуск продукции был равен заданному количеству R (плановое задание для системы в целом), а суммарные затраты на производство продукции были минимальными. Обозначим: x_i — план, z_i — затраты i -го предприятия на выпуск продукции в количестве x_i .

З а м е ч а н и е. В дальнейшем, если не указаны пределы изменения индекса, предполагается, что он принимает все возможные значения. Так, запись $x_i = \lambda s_i$ определяет совокупность n соотношений ($i = 1 \div n$).

Естественно принять в детерминированных моделях, что при заданном плане x_i существует минимальная величина $Z_i(x_i)$ затрат. Однако реальные затраты могут быть значительно выше этой объективной величины (плохая организация производства, отсутствие заинтересованности предприятия к снижению затрат и т. д.). Понятно, что $Z_i(x_i)$ — неубывающая функция x_i (затраты растут с ростом плана). Для упрощения примем $Z_i(x_i) = \frac{1}{2r_i} x_i^2$. Параметр r_i будем называть коэффициентом эффективности производства. Итак, реальные затраты i -го предприятия $z_i \geq \frac{1}{2r_i} x_i^2$.

Суммарные затраты $\Phi(z) = \sum_{i=1}^n z_i$. Задача центра минимизиро-

вать суммарные затраты $\Phi(z)$ при условии $\sum_{i=1}^n x_i = R$. Функцию

$\Phi(z)$ будем называть целевой функцией центра в рассматриваемом периоде.

Чтобы завершить описание модели осталось договориться о мотивах, определяющих поведение предприятий. Интересы предприятия определяются целым рядом материальных, моральных, престижных и прочих факторов. Однако нас интересует выражение этих целей через переменные, фигурирующие в модели, т. е. через план x_i и затраты z_i . Примем, что при выполнении плана предприятие получает определенный доход, возрастающий с ростом плана и с уменьшением затрат $f_i = \lambda x_i - z_i$. Например, f_i может определять величину фонда материального поощрения предприятия с точностью до положительного множителя. Если λ — цена продукции, то $(\lambda x_i - z_i)$ определяет величину прибыли. $f_i = \lambda x_i - z_i$ будем называть *целевой функцией* предприятия i в *рассматриваемом периоде функционирования*. Для конкретизации модели будем считать, что λ — цена продукции и, следовательно, f_i — прибыль предприятия i в рассматриваемом периоде функционирования.

Заметим теперь, что если бы центр знал коэффициенты эффективности $\{r_i\}$ всех предприятий, то задача оптимального функционирования системы была бы элементарной:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2r_i} x_i^2 \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = R. \quad (1.2)$$

Применяя метод множителей Лагранжа (см. приложение 1), выпишем функцию Лагранжа

$$L(x, \mu) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2r_i} x_i^2 \right) - \mu \left(\sum_{i=1}^n x_i - R \right),$$

где μ — множитель Лагранжа. Дифференцируя по x_i , получаем $x_i = \mu r_i$. И, наконец, определяя μ из условия (1.2) находим оптимальный план

$$\tilde{x}_i = \frac{r_i}{H} R, \quad H = \sum_{i=1}^n r_i. \quad (1.3)$$

Теперь центру достаточно назначить каждому предприятию i соответствующий план x_i и обеспечить контроль за его выполнением. А поскольку при заданном плане x_i и цене λ прибыль предприятия максимальна при минимальных затратах, то предприятие заинтересовано реализовать план с минимальными затратами $\frac{1}{2r_i} \tilde{x}_i^2 = \tilde{z}_i$. Затраты на выпуск всей продукции будут при этом также минимальными и равны

$$\Phi_m = \sum_{i=1}^n \tilde{z}_i = \frac{1}{2H} R^2.$$

Проблема возникает в том случае, если центр имеет ограниченную информацию о коэффициентах эффективности предприятий. А именно, примем, что центру известны только границы $[d_i, D_i]$ возможных значений r_i ($0 < d_i \leq r_i \leq D_i < \infty$) (решение принимается в условиях неопределенности). В этом случае довольно распространённым является принцип максимального гарантированного результата, который в нашей задаче приводит к выбору плана, обеспечивающего минимальные затраты в наихудших условиях производства, т. е. при минимальных возможных значениях коэффициентов эффективности $\{r_i\}$. Примем для упрощения одни и те же границы $[d, D]$ для всех предприятий. Решая задачу оптимального планирования при значениях $r_i = d$, получим план $x_i^0 = R/n$ со значением целевой функции системы

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2r_i} \frac{R^2}{n^2} = \frac{R^2}{2n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i},$$

т. е. с точки зрения центра все предприятия находятся в равных условиях, и поэтому плановое задание распределяется поровну. Относительное увеличение затрат в плане x^0 по сравнению с оптимальным планом $\tilde{x}$

$$\frac{\Phi_m}{\Phi_0} = \frac{n^2}{\left(\sum_i r_i\right) \left(\sum_i \frac{1}{r_i}\right)}$$

зависит от $\{r_i\}$, неизвестных центру. Чтобы получить оценку, не зависящую от $\{r_i\}$, возьмем минимум по всевозможным $d \leq r_i \leq D$. Покажем, во-первых, что этот минимум достигается при значениях r_i , равных либо d , либо D . Действительно, минимум Φ_m/Φ_0 соответствует максимуму выражения

$$\left(\sum_i \frac{1}{r_i}\right) \left(\sum_i r_i\right). \quad (1.4)$$

Дифференцируя по r_i , получаем

$$\left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{r_j} \right) - \frac{1}{r_i^2} \left(\sum_{j \neq i} r_j \right).$$

Это выражение — возрастающая функция r_i . Следовательно, (1.4) является выпуклой функцией и достигает максимума на границе области $[d, D]$. Обозначим k — число значений r_i , равных D , соответственно $(n-k)$ — число значений r_i , равных d . Тогда

$$\left(\sum_j r_j \right) \left(\sum_j \frac{1}{r_j} \right) = [kD + (n-k)d] \left[\frac{k}{D} + \frac{n-k}{d} \right].$$

Несложные вычисления показывают, что максимум достигается при $k=n/2$, если n — четно, или $k=(n \pm 1)/2$, если n — нечетно. Окончательно получаем, обозначив $\kappa = d/D$,

$$K_0 = \min_{\{r_i\}} \frac{\Phi_m}{\Phi_0} = \begin{cases} \frac{4\kappa}{(\kappa+1)^2}, & \text{если } n \text{ — четное,} \\ \frac{4\kappa n^2}{(\kappa+1)^2(n^2-1) + 4\kappa}, & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Из графика зависимости $K_0(\kappa)$ для четных n (рис. 1.1.) видно, что при малых κ эффективность планирования с использованием только имеющейся информации весьма низкая. Так, при $\kappa=0,5$

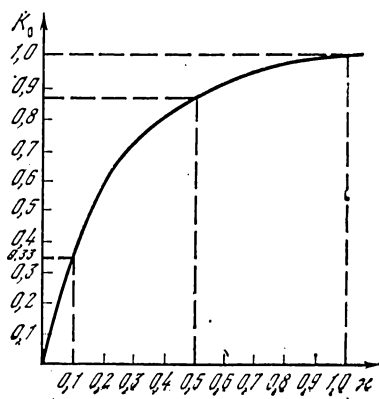


Рис. 1.1

($D=2d$), $K_0 \approx 0,89$, а при $\kappa=0,1$ ($D=10d$) только 0,33. Возникает вопрос, нельзя ли предложить более эффективную схему управления системой, учитывая тот факт, что предприятия имеют более точную информацию о своих возможностях, а именно знают достоверные значения r_i своих коэффициентов эффективности. Можно, например, обязать предприятия сообщать в центр оценки коэффициентов эффективности или непосредственно планы x_i ,

которые центр корректирует так, чтобы суммарный выпуск продукции был равен R . Центр может оценивать эффективность производства на основе известных планов и затрат на их реализацию в предыдущие периоды и планировать, опираясь на эти оценки. Предшествующий планированию этап получения дополнительной информации о предприятиях будем называть *этапом формирования данных*. Рассмотрим различные способы организации взаимоотношений между центром и предприятиями.

§ 2. Принцип жесткой централизации

Если центр обязывает предприятия сообщать оценки коэффициентов эффективности, то способ формирования данных называется *встречным*, поскольку информация движется «снизу вверх» (от предприятий к центру), а планы назначаются «сверху вниз» (от центра — предприятиям).

Обозначим s_i оценку коэффициента эффективности, сообщаемую i -м предприятием, $s = \{s_i\}$ — совокупность всех оценок. Центр на основе полученной информации назначает предприятиям планы $\{x_i(s)\}$ и устанавливает цену $\lambda(s)$ продукции. Процедура $\pi(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$ определения планов и цены называется *законом управления* ($x(s)$ — закон планирования, а $\lambda(s)$ — закон ценообразования в нашей «модельной экономике»).

Законы управления определяются, как правило, на основе тех или иных *принципов управления*. *Принцип жесткой централизации* (ЖЦ) характеризуется тем, что центр в первую очередь учитывает интересы системы. Для рассматриваемого нами случая этот принцип соответствует решению центром задачи оптимального планирования

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2s_i} x_i^2 \longrightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n x_i = R.$$

Ее оптимальное решение определяет закон планирования

$$x_i(s) = s_i \frac{R}{S}, \quad \text{где } S = \sum_i s_i.$$

Выбор закона ценообразования в данном случае произволен. Его конкретизация определяет некоторый закон жесткой централизации.

Рассмотрим простейший вариант, когда цена λ фиксирована. Подставляя закон планирования $x_i(s)$ в целевую функцию предприятия, выразим ее как функцию сообщаемых оценок $\{s_i\}$:

$$\mathcal{D}_i(s) = \lambda x_i(s) - \frac{1}{2r_i} x_i^2(s) = \frac{\lambda s_i}{S} R - \frac{s_i^2 R^2}{2r_i S^2}. \quad (2.1)$$

Анализ выражения (2.1) показывает, что прибыль предприятия

зависит не только от его оценки, но и от оценок всех остальных предприятий. К анализу функционирования системы в этом случае естественно применить теоретико-игровой подход. Мы имеем дело с типичной игрой n лиц (предприятий) с функциями выигрыша i -го игрока (предприятия) $\mathcal{D}_i(s)$. Оценка s_i является стратегией i -го игрока, а отрезок $[d, D]$ — множеством возможных стратегий. Совокупность оценок $s = \{s_i\}$ определяет ситуацию игры (см. [7]). Под решением игры будем понимать ситуацию равновесия в смысле Нэша (точка Нэша), т. е. ситуацию s^* такую, что

$$\mathcal{D}_i(s^*) = \max_{d \leq s_i \leq D} \mathcal{D}_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

(отдельному предприятию невыгодно менять стратегию, если остальные предприятия придерживаются прежних стратегий). Для ее определения заметим, что (2.1) достигает максимума при $x_i = \lambda r_i = v_i$. Кроме того, $x_i(s) = s_i R / S$ — возрастающая функция s_i . Поэтому если $x_i(s^*) < v_i$, то $s_i^* = D$, а если $x_i(s^*) > v_i$, то $s_i^* = d$. Наконец, если $d < s_i^* < D$, то обязательно $x_i^* = x_i(s^*) = v_i$. Примем, что предприятия упорядочены по возрастанию v_i , т. е. $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$. Рассмотрим пять возможных случаев.

а) $nv_1 \geq R$, $\sum_i v_i > R$ (предложения на выпуск продукции со стороны предприятий существенно превышают спрос R). Единственная ситуация равновесия $s^* = D$. При этом $x_i^* = R/n$.

б) $nv_1 < R < \sum_i v_i$ (предложения на выпуск продукции со стороны предприятий превышают спрос). Определим минимальное $0 < k < n$ такое, что

$$R - \sum_1^k v_i \leq (n-k)v_{k+1}.$$

Покажем, что ситуация

$$s_i^* = \begin{cases} \frac{(n-k)D}{R} \lambda r_i, & i = 1 \div k, \\ R - \sum_1^k v_i, & \\ D, & i = (k+1) \div n \end{cases} \quad (2.2)$$

является точкой Нэша. Для этого, во-первых, докажем, что

$$r_i \left(R - \sum_1^k v_i \right) < (n-k) D v_i < D \left(R - \sum_1^k v_i \right), \quad i = 1 \div k. \quad (2.3)$$

Правая часть этого неравенства следует из условия

$$R - \sum_1^k v_j > (n-k)v_i,$$

справедливого для всех $i=1 \div k$ (действительно, если бы имело место $R - \sum_1^k v_j \leq (n-k)v_k$, то $R - \sum_1^{k-1} v_j \leq [n-(k-1)]v_k$, что противоречит условию выбора k). Левая часть (2.3) следует из условия $\sum_i v_i = \lambda H > R$. Итак, $r_i < s_i^* < D$ для всех $i=1 \div k$. В то же время для $i=1 \div k$

$$x_i^* = \frac{s_i^*}{S^*} R = v_i,$$

в чем легко убедиться. Таким образом, для первых k предприятий условия равновесия Нэша выполнены. Осталось доказать, что для остальных предприятий $x_i^* \leq v_i$. Это следует из правила выбора k , так как для всех $i \geq k+1$

$$v_i \geq v_{k+1} \geq \frac{R - \sum_1^k v_j}{n-k} = x_i^*.$$

У п р а ж н е н и е 2.1. Докажите единственность ситуации равновесия (2.2).

в) $\sum_i v_i = R$ (баланс спроса и предложения). Любая ситуация вида $\mathbf{s}^* = \gamma \mathbf{r}$, ($\gamma > 0$ параметр) является точкой Нэша, так как $\mathbf{x}^* = \mathbf{v}$. Из условия $\mathbf{d} \leq \mathbf{s}^* \leq \mathbf{D}$, получаем возможные значения параметра $d/r_1 \leq \gamma \leq D/r_n$ (напоминаем, что $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$). Докажем, что других ситуаций равновесия нет. Предположим противное, пусть $\mathbf{s}$ — точка Нэша и $\min_i \frac{s_i}{r_i} < \max_i \frac{s_i}{r_i}$. Обозначим $\mu = \min_i \frac{s_i}{r_i}$ и пусть $s_1 = \mu r_1$. Если бы $s_i = \mu r_i$ для всех i , то $x_i(\mathbf{s}) = v_i$. Однако $s_i \geq \mu r_i$, $i=2 \div n$ и существует j такое, что $s_j > \mu r_j$. Поэтому $x_1(\mathbf{s}) < v_1$ и $s_1 = D$. Если теперь $\frac{s_k}{r_k} = \max_i \frac{s_i}{r_i}$, то аналогичные рассуждения приводят к выводу $s_k = d$, если $\mathbf{s}$ — точка Нэша. Однако при этом $s_1/r_1 = D/r_1 \geq 1 \geq d/r_k = s_k/r_k$, что противоречит условию $\frac{s_1}{r_1} < \frac{s_k}{r_k}$.

г) $\sum_i v_i < R < nv_n$ (спрос на продукцию превышает предложение со стороны предприятий). Определим минимальное k такое, что

$$R - \sum_{n-k}^n v_i \geq v_{n-k-1} (n-k-1).$$

Единственная ситуация равновесия

$$s_i^* = \begin{cases} d, & i = 1 \div (n-k-1), \\ \frac{(n-k-1)d}{R - \sum_{n-k}^n v_i} v_i, & i = (n-k) \div n. \end{cases}$$

Доказательство проводится аналогично случаю б).

д) $nv_n \leq R$, $\sum_i v_i < R$ (спрос на продукцию существенно превышает предложение со стороны предприятий). Единственная ситуация равновесия $s^* = d$, $x^* = R/n$.

У п р а ж н е н и е 2.2. Обоснуйте случаи а) и д), т. е. докажите, что ситуации $s^* = D$ для случая а) и $s^* = d$ для случая д) являются единственными точками Нэша.

Заметим, что для случаев а) и д) план в ситуации равновесия совпадает с полученным при использовании только имеющейся информации о границах $\{d, D\}$. Поэтому и эффективность законов ЖЦ будет не выше, чем (1.5). В действительности можно показать, что случаи а) (сильный избыток предложения продукции) и д) (сильный дефицит продукции) являются самыми неблагоприятными режимами работы системы с точки зрения ее эффективности. Поэтому эффективность законов ЖЦ (при фиксированной цене продукции) в точности равна K_0 . Таким образом, в данном случае дополнительная информация не дает эффекта. Это довольно естественно, поскольку в случаях а) и д) сообщаемые оценки равны граничным значениям (D или d соответственно) и, по существу, не несут новой информации для центра.

Эффективность рассмотренного закона ЖЦ можно повысить, если ввести штрафы за искажение информации. Пусть на этапе реализации центр может оценить реальные затраты на выпуск продукции и тем самым реально достигнутое значение эффективности $a_i = x_i^2 / 2z_i \leq r_i$. Это позволяет ввести в целевую функцию составляющую, соответствующую штрафу при отклонении a_i от сообщенной оценки s_i . Мы рассмотрим случай «сильных штрафов», когда единственной разумной стратегией предприятия является совпадение реальной a_i и планируемой s_i эффективности. Так как $a_i \leq r_i$, то сообщаемая оценка в случае сильных штрафов также должна удовлетворять условию $s_i \leq r_i$. При этом $z_i =$

$=x_i^2/2a_i=x_i^2/2s_i$, и целевая функция (2.1) предприятия i примет вид

$$\mathcal{D}_i(s) = \lambda x_i(s) - \frac{1}{2s_i} x_i^2(s) = \frac{s_i R}{S} \left(\lambda - \frac{R}{2S} \right). \quad (2.4)$$

Покажем, что если $\lambda \geq R/2S$, то $s^* = r$ — единственная ситуация равновесия. Действительно, при $\lambda \geq R/2S$ оба сомножителя s_i/S и $\lambda - \frac{R}{2S}$ возрастающие функции s_i и, следовательно, $\mathcal{D}_i(s)$ также возрастающая функция s_i . Поэтому максимум $\mathcal{D}_i(s)$ достигается на границе $s_i^* = r_i$. Таким образом, установив достаточно высокую цену продукции, центр может обеспечить оптимальное функционирование системы (в смысле минимума затрат на производство продукции), т. е. $K_{\text{жц}} = 1$. Для этого достаточно взять $\lambda = R/2nd$. Однако цена продукции при малых значениях d может быть значительно большей, чем $\tilde{\lambda} = R/H$. Если же $\lambda < R/2nd$, то возможен случай $\lambda < R/2H$, игровой анализ которого является более сложным. Рассмотрим пример. Пусть $n=5$, $R=100$, $\lambda=1$, $d=1$, $r_i=5$, $i=1 \div 5$, $H=25$, имеем $\lambda=1 < R/2H=2$. Если все предприятия сообщают достоверные оценки, то

$$\mathcal{D}_i(s) = 20(1-2) = -20, \quad i=1 \div 5.$$

Анализ выражения (2.4) показывает, что в этих условиях каждому предприятию выгодно сообщать минимальную оценку $s_i=1$ (при условии, что все остальные предприятия сообщают достоверные оценки), т. е. ситуация $s^* = r$ не является точкой Нэша. Проведем анализ ситуаций, в которых определенное число k предприятий сообщают достоверные оценки, а остальные $(n-k)$ — минимальные оценки.

а) случай $k=5$ мы уже рассмотрели.

б) $k=4$. Имеем $S=4 \cdot 5 + 1 = 21$. Прибыль (точнее, потери, так как прибыль отрицательна) предприятия, сообщившего минимальную оценку, равна

$$\frac{100}{21} \left(1 - \frac{100}{42} \right) \approx -7,$$

а потери предприятий, сообщивших достоверные оценки, равны $5 \cdot (-7) = -35$.

в) $k=3$. Имеем $S=3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 17$. Потери предприятий, сообщивших минимальные оценки, равны

$$\frac{100}{17} \left(1 - \frac{100}{34} \right) \approx -12,$$

а сообщивших достоверные оценки, равны $5 \cdot (-12) = -60$.

г) $k=2$. Имеем $S=2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$. Потери предприятий, сообщивших минимальные оценки, равны $\frac{100}{13} \left(1 - \frac{100}{26} \right) \approx -22$, а сообщивших достоверные оценки, равны $(-22) \cdot 5 = -110$.

д) $k=1$. Имеем $S=1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 9$. Потери предприятий, сообщивших минимальные оценки, равны $\frac{100}{9} \left(1 - \frac{100}{18}\right) \approx -50$, а сообщивших достоверные оценки, равны $(-50) \cdot 5 = -250$.

е) $k=0$. Имеем $S=5$. Все предприятия сообщили минимальные оценки. Потери каждого предприятия равны $\frac{100}{5} \left(1 - \frac{100}{10}\right) = -180$.

Все пять случаев можно изобразить в виде графа (рис. 1.2). Числа в вершинах графа равны числу предприятий, сообщивших достоверные оценки, числа над вершинами равны потерям предприятий, сообщивших минимальные оценки, а числа под вершинами равны потерям предприятий, сообщивших достоверные оценки. Сплошные дуги соответствуют ситуации, когда одно из предприятий, сообщавших ранее достоверную оценку, изменяет

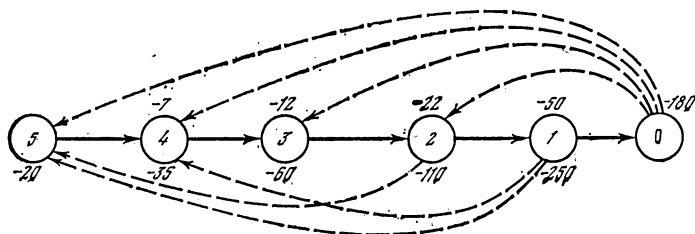


Рис. 1.2

стратегию, т. е. сообщает минимальную оценку, при этом его потери уменьшаются. Из рисунка легко видеть, что вершина 0 соответствует единственной ситуации равновесия (все предприятия сообщают минимальные оценки). Очевидно, что эта ситуация равновесия «неразумна». Действительно, существуют ситуации 5, 4, 3, 2, более предпочтительные для всех предприятий. Например, два предприятия могут договориться и перейти из ситуации 0 в ситуацию 2 (т. е. сообщить достоверные оценки). При этом их потери уменьшаются на $(180-110)=70$, а потери остальных предприятий на $(180-22)=158$. Но для ситуации 2 также существует более предпочтительная ситуация 5. Для перехода в эту ситуацию три предприятия, сообщавшие в ситуации 2 минимальные оценки, должны договориться и сообщить достоверные оценки. При этом их потери уменьшаются на $(22-20)=2$, а потери остальных предприятий — на $(110-20)=90$. Пунктирные дуги на рис. 1.2 отражают предпочтительность ситуаций. Ситуации 5, 4, 3 являются оптимальными по Парето (точки Парето), поскольку они не имеют предпочтительных. Заметим, что гарантирующей стратегией каждого предприятия является сообщение минимальной оценки. Таким образом, равновесная ситуация $k=0$ является к тому же и гарантирующей ситуацией (и тем не менее не является «разумной»).

Проведенный анализ показывает, что даже при введении сильных штрафов достоверность оценок и оптимальность планов удастся обеспечить только при достаточно высокой цене $\lambda \geq \geq R/2nd \gg R/H = \tilde{\lambda}$, если $d \ll H/2n$.

§ 3. Принцип открытого управления

Причина низкой эффективности принципа ЖЦ (при фиксированной цене продукции) заключается в определенном противоречии интересов центра и предприятий. Суть этого противоречия в следующем. Центр планирует выпуск продукции в количестве R , а предприятия в сумме «желают» выпускать $V = \sum_i v_i =$

$= \lambda H$. Если $R \neq \lambda H$, то цели центра и предприятий не совпадают и никакая процедура планирования этого конфликта не разрешит. Понятно, что предприятия, преследуя свои цели (в данном случае, желая получить «выгодные» планы v_i), пользуются предоставленной им свободой в предоставлении информации центру. Возникает идея согласовать интересы центра и предприятий. Примером такого согласования является случай (в) анализа принципа жесткой централизации. В этом случае $\sum_i v_i = R$, т. е. цели

центра и предприятий совпадают. Противоречия нет, а значит, и нет причин искажать данные. Действительно, как показал анализ, ситуации равновесия имеют вид $s^* = \gamma g$. Учитывая моральный стимул «сообщать достоверные сведения» при прочих равных условиях, можно принять, что предприятия будут сообщать достоверные оценки. Итак, для разрешения конфликта достаточно установить цену $\lambda = R/H$. Трудность здесь в том, что величины H центр не знает (т. е. знает только, что $nd \leq H \leq nD$). Однако он имеет оценки $\{s_i\}$, полученные от предприятий, а значит, и оценку $S = \sum_i s_i$ величины H , оценку целевой функции предприятия

$\lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2$ и оценку λs_i «выгодного» для предприятия плана $v_i = \lambda r_i$. Попытаемся устранить конфликт, опираясь на имеющуюся информацию. Для этого определим закон управления

$$\lambda(s) = \frac{R}{S}, \quad x_i(s) = \lambda(s) s_i = s_i \frac{R}{S}. \quad (3.1)$$

Заметим, что при таком определении $\lambda(s)$, план $x_i(s)$ обеспечивает максимум функции $\lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2$, отражающей представле-

ние центра об интересах предприятия. Будем называть ее *функцией предпочтения* предприятия. Таким образом, при законе (3.1) каждое предприятие получает план, обеспечивающий максимум его функции предпочтения. Такой план будем называть

согласованным. Принцип управления, при котором все предприятия получают согласованные планы, назовем *принципом открытого управления* (ОУ). В данном случае принцип ОУ определяет единственный *закон открытого управления* (3.1). Формально принцип ОУ можно записать в виде следующей задачи оптимизации: определить $x \geq 0$, $\lambda > 0$ такие, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2s_i} x_i^2 \rightarrow \min_x, \quad \sum_{i=1}^n x_i = R, \quad (3.2)$$

$$\lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2 = \max_z \left(\lambda z - \frac{1}{2s_i} z^2 \right). \quad (3.3)$$

Задача (3.2), (3.3) называется *задачей согласованного планирования*, а условия (3.3) условиями *совершенного согласования*.

Проведем анализ полученного закона ОУ, т. е. определим точки Нэша соответствующей игры. Подставляя закон (3.1) в целевые функции предприятий, получим

$$\mathcal{D}_i(s) = \lambda(s) x_i(s) - \frac{1}{2r_i} x_i^2(s) = s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i} \right) \frac{R^2}{S^2}. \quad (3.4)$$

Выпишем уравнения для определения ситуации равновесия, предполагая, что $s_i^* \in (d, D)$,

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i(s)}{\partial s_i} = \left(1 - \frac{s_i}{r_i} \right) \frac{R^2}{S^2} - \frac{2R^2}{S^3} s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i} \right) = 0.$$

Несложные преобразования приводят к следующей системе уравнений

$$s_i^* = r_i \frac{S_i^*}{r_i + S_i^*}, \quad S_i^* = S^* - s_i^* = \sum_{j \neq i} s_j^*. \quad (3.5)$$

Если решение этой системы $d \leq s^* \leq D$, то s^* ситуация равновесия. Если для некоторого множества Q' предприятий $s_i^* < d$, то ситуация равновесия определяется из условий

$$\begin{aligned} s_i^* &= d, & i &\in Q' \subset Q, \\ s_i^* &= r_i \frac{S_i^*}{r_i + S_i^*}, & i &\notin Q, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $S_i^* = n_Q d + \sum_{j \notin Q} s_j^* - s_i^*$, n_Q — число элементов множества Q .

Так, в случае $n=1$, единственная ситуация равновесия $s_1^* = d$. Аналогично для случая $n=2$ имеем из (3.5)

$$s_1 = s_2 \frac{r_1}{r_1 + s_2} < s_2, \quad \text{если } s_2 > 0,$$

$$s_2 = s_1 \frac{r_2}{r_2 + s_1} < s_1, \quad \text{если } s_1 > 0.$$

Следовательно, единственное решение системы (3.5) $s_1 = s_2 = 0$, и ситуация равновесия $s_1^* = s_2^* = d$.

Покажем, что при $n > 2$ система (3.5) имеет единственное положительное решение. Подставляя в (3.5) $S_i^* = S^* - s_i^*$, получим после несложных преобразований

$$s_i^* = r_i + \frac{1}{2} S^* - \sqrt{r_i^2 + \left(\frac{1}{2} S^*\right)^2}. \quad (3.7)$$

Суммируя, получаем уравнение для S^*

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right) S^* + H = \sum_i \sqrt{r_i^2 + \left(\frac{1}{2} S^*\right)^2}. \quad (3.8)$$

Это уравнение имеет единственное решение, что легко видеть из графиков функций $H + \left(\frac{n}{2} - 1\right) S$ и $\sum_i \sqrt{r_i^2 + \frac{1}{4} S^2}$ (рис. 1.3).

Аналогично показывается единственность решения системы (3.6).

Упражнение 3.1. Докажите, что если $r_i > r_j$, то для решения системы (3.5) имеет место $r_i - s_i^* > r_j - s_j^*$, $s_i^*/r_i < s_j^*/r_j$.

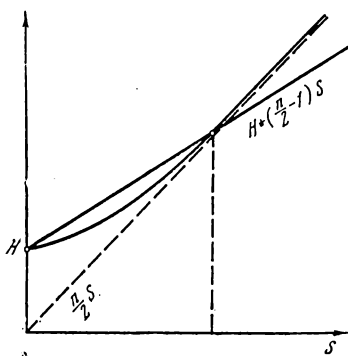


Рис. 1.3

Отклонение точки Нэша s^* от достоверного значения вектор-параметра r будем оценивать величиной степени достоверности информации

$$J(n, \kappa) = \max_r \max_i \left| \frac{r_i - s_i^*}{r_i} \right| = \max_r \max_i \frac{r_i}{S_i^* + r_i}.$$

Учитывая, что $S_i^* \geq (n-1)d$, $r_i \leq D$, получаем

$$0 \leq J(n, \kappa) \leq \frac{D}{(n-1)d + D} = \frac{1}{1 + (n-1)\kappa}, \quad 0 < \kappa \leq 1. \quad (3.9)$$

Итак, мы показали, что ситуация равновесия существует и единственна. Перейдем к оценке эффективности закона открытого управления. Заметим, во-первых, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(n, \kappa) = 0$$

и, следовательно, $s_i^* \approx r_i$ при достаточно большом числе предприятий. Отсюда следует, что $x_i^* \approx \tilde{x}_i$, и $K_{\text{оу}} \approx 1$. Таким образом, при достаточно большом числе предприятий закон ОУ является квазиоптимальным законом управления, т. е. обеспечивает близость равновесного плана к оптимальному. Дополнительным полезным свойством закона ОУ является близость сообщаемых оценок в ситуации равновесия к достоверным. Цена продукции в этой ситуации $\lambda^* \approx R/H = \tilde{\lambda}$.

Для более детального исследования рассмотрим случай, когда в системе имеется одно предприятие, коэффициент эффективности которого значительно выше, чем у других предприятий. Пусть это первое предприятие, т. е. $r_1 \gg r_i$, $i = 2 \div n$. Тогда при достаточно большом числе предприятий $s_i^* \approx r_i$, $i = 2 \div n$ и

$$s_1^* = r_1 \frac{\sum_{j=2}^n r_j}{r_1 + \sum_{j=2}^n r_j} = r_1 \frac{H - r_1}{H}.$$

Для оценки эффективности функционирования системы определим

$$S^* = r_1 \frac{H - r_1}{H} + (H - r_1) = \frac{H^2 - r_1^2}{H},$$

$$x_1^* = \frac{s_1^*}{S^*} R = \frac{r_1}{H + r_1} R, \quad x_i^* = \frac{r_i H}{H^2 - r_1^2} R,$$

$$\Phi_{\text{оу}} = \frac{R^2}{2} \left[\frac{r_1}{(H + r_1)^2} + \frac{(H - r_1) H^2}{(H^2 - r_1^2)^2} \right] = \frac{R^2}{2} \left[\frac{r_1 (H - r_1) + H^2}{(H + r_1)^2 (H - r_1)} \right].$$

Учитывая, что $\Phi_m = R^2/2H$, получаем

$$K_{\text{оу}}(\mu) = \frac{\Phi_m}{\Phi_{\text{оу}}} = \frac{(H + r_1)^2 (H - r_1)}{H [H^2 + r_1 H - r_1^2]} = \frac{(\mu + 1)^2 (1 - \mu)}{(1 + \mu - \mu^2)},$$

где $\mu = r_1/H$. Легко убедиться, что $K_{\text{оу}}(\mu)$ — убывающая функция μ . А так как $\mu = \frac{r_1}{H_1 + r_1} \leq \frac{D}{(n-1)d + D} = \frac{1}{1 + (n-1)\kappa}$, то окончательно получаем

$$K_{\text{оу}} = \min_{\mu} K_{\text{оу}}(\mu) = \frac{[2 + (n-1)\kappa]^2 (n-1)\kappa}{[1 + (n-1)\kappa][1 + 3(n-1)\kappa + (n-1)^2 \kappa^2]}. \quad (3.10)$$

Так, например, при малых κ имеем

$$K_{oy} \approx 4(n-1)\kappa, \text{ а } K_{жц} \approx 4\kappa.$$

Следовательно, при малых κ закон ОУ примерно в $(n-1)$ раз эффективнее закона ЖЦ (при фиксированной цене λ).

Предположим эффективность первого предприятия, назовем его монополистом, значительно выше суммарной эффективности остальных. При достаточно большом числе предприятий имеем

$$r_1 \gg H_1, \gg \frac{1}{2} H,$$

$$s_i^* \approx r_i, \quad i = 2 \div n, \quad s_1^* \approx r_1 \frac{H_1}{H} = r_1 \frac{H_1}{r_1 + H_1} \approx H_1,$$

$$S^* \approx \sum_{i=2}^n r_i + H_1 = 2H_1,$$

$$x_1^* \approx \frac{1}{2} R, \quad x_i^* \approx \frac{r_i}{2H_1} R, \quad i = 2 \div n.$$

Таким образом, монополист в ситуации равновесия выпускает почти половину всей продукции, в то время как в оптимальном плане — почти всю продукцию. Сообщая заниженную оценку коэффициента эффективности ($s_1^* \approx H_1 \ll r_1$) — монополист добивается повышенной цены продукции

$$\lambda^* = \frac{R}{S^*} \approx \frac{R}{2H_1} \gg \frac{R}{H_1 + r_1} = \frac{R}{H} = \tilde{\lambda}$$

($\tilde{\lambda}$ — цена, устанавливаемая центром при достоверной информации) и, следовательно, получает «сверхприбыль»

$$\lambda^* x_1^* - \frac{1}{2r_1} x_1^{*2} \approx \frac{R^2}{4H_1} \gg \frac{R^2}{2} \frac{r_1}{(H_1 + r_1)^2} \approx \frac{R^2}{2r_1}.$$

Упражнение 3.2. Пусть $r_1 = D$, $r_i = d$, $i = 2 \div n$. Определите эффективность закона ОУ. Сравните с законом ЖЦ для случаев $n = 3$ и 4 . Сравните с выражением (3.10).

Предыдущий анализ показал, что хотя закон ОУ эффективнее закона ЖЦ, но при малом числе предприятий, а особенно при наличии монополиста в системе, эффективность закона ОУ может быть весьма низкой. Здесь существует еще одна опасность — образование коалиции, когда несколько предприятий договариваются о совместных действиях. Пусть, например, множество Q предприятий договорились сообщать оценки $s_i = \gamma r_i$, где γ — фиксированный коэффициент. Тогда суммарная оценка коалиции $Q - s_Q = \sum_{i \in Q} s_i = \gamma \sum_{i \in Q} r_i = \gamma H_Q$. Суммарный план выпуска

коалиции — $x_Q = \frac{s_Q}{S} R$. Заметим, что производство продукции x_Q

распределяется внутри коалиции оптимальным образом (прямо пропорционально коэффициентам эффективности производства). Поэтому суммарные затраты предприятий, входящих в коалицию, равны

$$Z_Q(x_Q) = \frac{1}{2H_Q} x_Q^2.$$

Таким образом, коалиция выступает как одно предприятие, имеющее эффективность H_Q . Если $H_Q \gg \frac{1}{2}H$, то коалиция является монополистом. В любом случае образование коалиции эквивалентно уменьшению числа предприятий, что приводит к увеличению искажения данных и снижению эффективности функционирования системы. Подчеркнем еще раз, что коалиция в данном случае является объединением на информационном уровне (члены коалиции договариваются только о величине γ , например, $\gamma=0,25$ — занижить в 4 раза сообщаемую оценку). Ниже мы покажем, что в условиях централизованного планирования можно предложить законы управления достаточно эффективные и при наличии монопольной организации (например, отрасли, специализирующейся на данном виде продукции).

Обобщенные оценки. Определим обобщенную оценку эффективности i -го предприятия

$$\tau_i(s) = \sum_j q_{ij} s_j,$$

где $\{q_{ij}\}$ — заданные числа такие, что $q_{ii} > 0$, $Q_i = \sum_k q_{ki} > 0$. Подставляя в закон ОУ оценки τ_i , вместо оценок s_i , получим новый закон управления

$$x_i[\tau(s)] = \frac{\tau_i(s)}{T(s)} R, \quad \lambda[\tau(s)] = \frac{R}{T(s)}, \quad (3.11)$$

где $T(s) = \sum_i \tau_i(s)$. Выпишем систему уравнений для определения ситуации равновесия, предполагая, что границы $[d, D]$ достаточно широки и ситуация равновесия $s^* \in (d, D)$:

$$\left(\lambda^* - \frac{\dot{x}_i^*}{r_i} \right) = \frac{\tau_i^* R Q_i}{T^{*2} q_{ii} - \tau_i^* T^* Q_i}, \quad (3.12)$$

где $\lambda^* = \lambda(\tau^*)$, $\dot{x}_i^* = \dot{x}_i(\tau^*)$, $\tau_i^* = \tau_i(s^*)$, $T^* = \sum_i \tau_i^*$. Заметим теперь, что если $Q_i \sim 0$, то $\dot{x}_i^* \sim \lambda^* r_i$, что соответствует условию оптимальности плана $\{\dot{x}_i^*\}$. Возьмем, например,

$$\tau_i = s_i - \frac{1-\varepsilon}{n-1} \sum_{k \neq i} s_k.$$

В этом случае $Q_i = \varepsilon$, и система (3.12) принимает вид

$$1 - \frac{\tau_i^*}{r_i} = \frac{\varepsilon \tau_i^*}{T^* - \varepsilon \tau_i^*}.$$

Ее решение при малых ε —

$$\tau_i^* \approx r_i \frac{T^*}{T^* + \varepsilon r_i} \approx r_i.$$

Ситуация равновесия при малых ε

$$s_i^* = \frac{(n-1)\tau_i^* + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)T^*}{n - \varepsilon} \approx \frac{(n-1)r_i + \frac{H}{\varepsilon}}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)r_i + \frac{H}{n\varepsilon}.$$

Таким образом, при малых ε план в ситуации равновесия близок к оптимальному при любом числе предприятий $n > 1$.

Пример. Пусть $n=2$, $r_1=1$, $r_2=9$, $d=1$, $D=100$. Заметим, что при $\varepsilon=1$ получаем закон ОУ и $s_1^*=s_2^*=d=1$. Затраты в системе равны $\Phi_{\text{оу}}=5R^2/36$, минимальные затраты $\Phi_m=R^2/20$. Эффективность закона ОУ в данном случае равна 0,36. Возьмем $\varepsilon=0,1$. Имеем $\tau_1^* \approx 1$, $\tau_2^* \approx 8$, $x_1^* \approx R/9$, $x_2^* \approx 8R/9$.

Затраты в системе —

$$\Phi^* = \frac{1}{2} \frac{R^2}{81} + \frac{64R^2}{2 \cdot 9 \cdot 81} = \frac{R^2}{162} \left(1 + \frac{64}{9}\right) \approx 0,0501 R^2.$$

Эффективность закона управления равна $\sim 0,998$. Ситуация равновесия $s_1^*=43$, $s_2^*=47$.

Недостатком закона управления (3.11) является искажение сообщаемой предприятиями информации, тем более значительное, чем меньше ε . Заметим, однако, что достоверные значения коэффициентов эффективности легко восстанавливаются, поскольку они близки к обобщенным оценкам (при малых ε).

Дифференцированные цены. Введем индивидуальные цены λ_i продукции для каждого предприятия следующим образом:

$$\lambda_i = R / (S_i + a_i), \quad (3.13)$$

где $a_i = x_i^2 / 2z_i$, $z_i \geq x_i^2 / 2r_i$.

Очевидно, что центр не может определить λ_i на этапе планирования, так как цена зависит от реальной эффективности a_i . Центр вычисляет норматив S_i и сообщает его предприятию i . Цену λ_i предприятие определяет самостоятельно на этапе реализации по формуле ценообразования (3.13). Подставляя закон планирования $x_i(s) = \frac{s_i}{S} R$ и закон ценообразования (3.13) в целевую

функцию предприятия, получим

$$\lambda_i x_i - \frac{1}{2a_i} x_i^2 = \frac{R^2 s_i}{S(S_i + a_i)} - \frac{s_i^2 R^2}{2a_i S^2}. \quad (3.14)$$

Заметим, что из $z_i \geq \frac{1}{2r_i} x_i^2$ следует, что $0 < a_i \leq r_i$. Дифференцируя (3.14) по s_i получаем уравнение для определения равновесной стратегии s_i^* :

$$\frac{1}{S_i^* + a_i} - \frac{s_i^*}{2a_i S^*} = \frac{s_i^*}{2a_i S^*}.$$

Его единственное решение $s_i^* = a_i$. Подставляя в (3.14), получаем

$$\lambda_i x_i^* - \frac{1}{2a_i} x_i^{*2} = \frac{R^2 a_i}{2A^2}, \text{ где } A = \sum_{j=1}^n a_j. \quad (3.15)$$

Определим теперь оптимальные затраты z_i i -го предприятия или реальный коэффициент эффективности производства $a_i = x_i^2 / 2z_i \leq r_i$. Дифференцируя (3.15) по a_i , получаем

$$\frac{A - 2a_i}{A^3} \cdot \frac{R^2}{2}.$$

Пусть $r_i \leq H/2$ ($n > 2$). Покажем, что в этом случае $a_i = r_i$. Действительно, пусть $a_i > A/2$ или $a_i > \sum_{j \neq i} a_j = A_i$. Тогда $a_j < A/2$ для всех $j \neq i$ и $a_j = r_j$, $j \neq i$. Имеем $r_i \geq a_i > A_i = H_i = H - r_i$ или $r_i > H/2$, что противоречит предположению. Пусть теперь $r_i > H/2$. Тогда, рассуждая аналогично предыдущему, получаем $a_j = r_j$, $j \neq i$, $r_i > H_i = A_i$ и $a_i = H_i$. Таким образом, если $r_i \leq H/2$ для всех i , то применение дифференцированных цен дает $s^* = a = r$, и, следовательно, план в ситуации равновесия совпадает с оптимальным. Однако при $r_i > 0,5 H$ в ситуации равновесия $s_i^* = 0,5$, $S = H_i$, $x_i^* = 0,5R < \frac{r_i}{H} R = \tilde{x}_i$, и равновесный план не является оптимальным.

Тем не менее эффективность закона управления и в этом случае повышается. Так, при $r_i = 0,5H$ план в ситуации равновесия является оптимальным. В то же время для закона ОУ при $r_i = 0,5 H$ имеем $x_i^* = \frac{1}{3} R \neq \tilde{x}_i = \frac{1}{2} R$. И только в случае монополиста ($r_i \gg 0,5 H$) применение дифференцированных цен практически не дает эффекта по сравнению с законом ОУ. При $n = 2$ любая ситуация $s_2^* = a$, где $d \leq a \leq \min(r_1, r_2)$ является ситуацией равновесия.

Штрафы. Примем, что центр планирует не только количество выпускаемой предприятием продукции, но и затраты на производство (либо другие показатели, например, себестоимость,

прибыль, рентабельность, которые однозначно выражаются через количество и затраты). Обозначим w_i планируемую величину затрат, которая определяется на основе оценок s_i эффективности производства, полученных от предприятий, а именно $w_i = \frac{1}{2s_i} x_i^2$. При отклонении реальных затрат z_i от планируемых, предприятие штрафуются. Рассмотрим простейший вид функции штрафа

$$\Theta_i = \begin{cases} \alpha (z_i - w_i), & \text{если } z_i \geq w_i, \\ \beta (w_i - z_i), & \text{если } z_i < w_i, \\ \alpha, \beta > 0, \end{cases}$$

где α — коэффициент штрафа за занижение, β — за завышение оценок затрат по сравнению с реальными. С учетом штрафов целевая функция предприятия запишется в виде

$$f_i(\lambda, x_i, z_i, w_i) = \lambda x_i - z_i - \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} (z_i - w_i), \quad (3.16)$$

где $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \alpha$, если $z_i \geq w_i$, и $(-\beta)$, если $z_i < w_i$. Поскольку в системе без штрафов $s_i^* < r_i$, а значит, $w_i^* = \frac{1}{2s_i^*} x_i^2 > \frac{1}{2r_i} x_i^2$, то достаточно провести анализ случая $w_i \geq z_i$. Имеем

$$f_i = \lambda x_i - (1 - \beta) z_i - \beta w_i.$$

Легко видеть, что при $\beta < 1$ прибыль убывающая функция z_i . Поэтому $z_i = \frac{1}{2r_i} x_i^2$. Если же $\beta > 1$, то прибыль возрастающая функция z_i и $z_i = w_i$, что совпадает со случаем $\beta = 1$. Будем говорить, что при $\beta \geq 1$ мы имеем дело с *сильными штрафами* за отклонение реальных затрат от планируемых. Рассмотрим случай $s_i \leq r_i$, $0 \leq \beta \leq 1$. Подставляя значение $z_i = \frac{1}{2r_i} x_i^2$ в целевую функцию предприятия, получим

$$f_i = \lambda x_i - \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \beta}{r_i} + \frac{\beta}{s_i} \right] x_i^2 = \lambda^2 s_i \left[\left(1 - \frac{\beta}{2} \right) - \frac{(1 - \beta) s_i}{2r_i} \right].$$

Дифференцируя по s_i , получаем систему уравнений для определения точки Нэша (предполагаем, что границы $[d, D]$ достаточно широки, и точка Нэша лежит внутри области):

$$s_i^* = \begin{cases} r_i \frac{s_i^*}{r_i + \rho s_i^*}, & \text{если } (1 - \rho) s_i^* < r_i, \\ r_i, & \text{если } (1 - \rho) s_i^* \geq r_i, \end{cases} \quad (3.17)$$

где $\rho = 1 - \frac{\beta}{2 - \beta}$.

У п р а ж н е н и е 3.3. Покажите, что система (3.17) имеет единственное решение при $n > 2$ для любого $0 < \rho < 1$.

У п р а ж н е н и е 3.4. Обозначим $s^*(\rho)$ ситуацию равновесия при заданном значении ρ . Покажите, что если $\rho_1 < \rho_2$, то $s_i^*(\rho_1) \geq s_i^*(\rho_2)$.

Для исследования возможностей повышения эффективности закона ОУ в системе со штрафами рассмотрим случай сильного штрафования $\beta = 1$ ($\rho = 0$). В этом случае

$$s_i^* = \begin{cases} \frac{1}{2} S^*, & \text{если } S^* < 2r_i, \\ r_i, & \text{если } S^* \geq 2r_i. \end{cases} \quad (3.18)$$

Пусть $r_k \leq H/2$. Покажем, что в этом случае $s_k^* = r_k$ ($n > 2$). Действительно, пусть $r_k > S^*/2$. Тогда $s_k^* = S^*/2$ и $s_i^* < S^*/2$ для всех $i \neq k$. Следовательно, $s_i^* = r_i$, ($i \neq k$), $S^*/2 = H_k = H - r_k = s_k^* < r_k$. Имеем $r_k > H/2$, что противоречит исходному предположению. Итак, если $r_i \leq H/2$ для всех i , то, применяя систему штрафов, можно обеспечить $s^* = r$, и, следовательно, эффективность закона ОУ $K_{\text{оу}} = 1$ для любого числа $n > 2$ предприятий. Минимальное β , при котором $s^* = r$, определяется из условия

$$1 \geq \beta \geq \frac{2}{H} \max_i r_i. \quad (3.19)$$

У п р а ж н е н и е 3.5. Выведите условие (3.19).

Пусть теперь для некоторого k — $r_k > H/2$. В этом случае ситуация равновесия

$$s_i^* = \begin{cases} H_k, & i = k, \\ r_i, & i \neq k. \end{cases}$$

Наконец, при $n = 2$ равновесными являются любые ситуации вида

$$s_1^* = s_2^* = s, \text{ где } d \leq s \leq \min(r_1, r_2).$$

Как легко видеть, ситуация равновесия для случая сильных штрафов совпадает с ситуацией равновесия для случая дифференцированных цен. Эффективность закона ОУ, естественно, также совпадает. Так, например, при наличии в системе монополиста, применение даже сильных штрафов практически не дает эффекта.

Адаптивный способ формирования данных. При адаптивном способе формирования данных оценка s_i параметра r_i определяется на основе известных планов, затрат и оценок в предыдущие периоды функционирования. Примем, что

$$s_{ik} = \max \left(\frac{x_{ik-1}^2}{2z_{ik-1}}, d \right),$$

где x_{ik-1} , z_{ik-1} — план и затраты в периоде $(k-1)$, s_{ik} — оценка ко-

эффективности производства в периоде k . В этом случае выбор предприятием конкретной величины затрат в данном периоде функционирования, очевидно, повлияет на план и цену продукции в будущие периоды. Как мы отмечали, одним из свойств активности организаций является учет последствий принимаемых «сегодня» решений. Для формализации этого свойства примем, что интересы предприятия в рассматриваемом периоде (будем считать, что это период с номером 0) определяются стремлением к максимуму взвешенной суммы прибылей в данном и будущих периодах

$$\lambda_0 x_{i0} - z_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_i^k [\lambda_k x_{ik} - z_{ik}], \quad (3.20)$$

где δ_i^k — дисконтирующий множитель, ($0 \leq \delta_i^k < 1$, будущие прибыли учитываются «сегодня» с меньшим весом). Выражение (3.20) будем называть критерием эффективности с учетом будущих периодов. Заметим, что выбор z_{i0} , по существу, эквивалентен выбору достигнутого коэффициента эффективности $a_{i0} = x_{i0}^2 / 2z_{i0} \leq r_i$, который и принимается за оценку s_{i1} следующего периода. Выбор a_i мы и будем считать стратегией i -го предприятия в рассматриваемом периоде (очевидно, $d \leq a_i \leq r_i$). Для упрощения примем следующую гипотезу поведения: предприятие предполагает, что достигнутая эффективность a_i останется неизменной в будущие периоды. Следовательно, и оценка s_{ik} будет равна a_i для всех $k \geq 1$. При сделанных предположениях критерий эффективности (3.20) примет вид

$$\lambda_0 x_{i0} - \frac{1}{2a_i} x_{i0}^2 + N_i \left[\lambda(a) x_i(a) - \frac{1}{2a_i} x_i^2(a) \right],$$

где $N_i = \frac{\delta_i}{1 - \delta_i}$. Величину N_i назовем *степенью дальновидности* предприятия. Подставляя закон ОУ, получим

$$\lambda_0 x_{i0} - \frac{1}{2a_i} x_{i0}^2 + \frac{1}{2} N_i \frac{R^2 a_i}{A^2}. \quad (3.21)$$

Ситуацию равновесия a^* будем называть устойчивой по периодам функционирования, если $x_i(a^*) = x_{i0}$, $i = 1 \div n$. Для ее определения дифференцируем (3.21) по a_i

$$\frac{R^2 N_i (A - 2a_i)}{A^3} + \frac{x_{i0}^2}{a_i^2} = 0.$$

Подставляя $x_{i0} = x_i(a^*) = a_i^* R/A^*$, получаем

$$\frac{(N_i + 1) A^* - 2a_i^* N_i}{(A^*)^3} = 0.$$

Окончательно имеем

$$a_i^* = \begin{cases} \frac{N_i + 1}{2N_i} A^*, & \text{если } \frac{N_i + 1}{2N_i} A^* < r_i, \\ r_i, & \text{если } \frac{N_i + 1}{2N_i} A^* \geq r_i. \end{cases} \quad (3.22)$$

Упражнение 3.6. Покажите, что при $N_i \leq 1$, единственная ситуация равновесия (устойчивая по периодам функционирования) $a^* = r$.

Упражнение 3.7. Покажите, что при $r_i \leq H/2$, единственная ситуация равновесия (устойчивая по периодам функционирования) $a^* = r$.

Упражнение 3.8. Покажите, что при $r_k > \frac{H}{2} \left(1 + \frac{1}{N_k}\right)$; $N_k > 1$, единственная ситуация равновесия (устойчивая по периодам функционирования)

$$a_i^* = \begin{cases} \frac{N_k + 1}{N_k - 1} H_k, & i = k, \\ r_i, & i \neq k. \end{cases} \quad (3.23)$$

Результаты анализа во многом аналогичны случаю сильных штрафов. Действительно, при $\delta_i = 1$, мы имеем $N_i = \infty$ и (3.22) совпадает с (3.18) с точностью до обозначений $\{a_i^*\}$ вместо $\{s_i^*\}$. Учитывая, что чем меньше N_k , тем ближе a_k^* к r_k , можно сделать вывод о большей эффективности закона ОУ при адаптивном способе формирования данных по сравнению с законом ОУ в случае сильных штрафов, если $0 \leq \delta_k < 1$ ($N_k < \infty$), т. е. если степень дальновидности монополиста не бесконечна. Следует, однако, отметить, что определение устойчивой по периодам функционирования ситуации равновесия потребовало дополнительных гипотез о поведении предприятий в будущие периоды, и представляется поэтому менее естественным, чем определение точки Нэша при встречном способе формирования данных.

Нормирование целевых функций. Примем, что предприятия получают только часть прибыли, а остальная часть идет в бюджет. Пусть остающаяся у предприятия i часть прибыли равна $\gamma[\lambda x_i - z_i]$, где γ определяется из условия нормировки

$$\gamma \sum_i (\lambda x_i - z_i) = M, \quad M > 0.$$

Целевая функция i -го предприятия в этом случае —

$$f_i^H = \frac{\lambda x_i - z_i}{\sum (\lambda x_j - z_j)} M.$$

Так как f_i^H — возрастающая функция прибыли $(\lambda x_i - z_i)$, то при встречном способе формирования данных $z_i = x_i^2 / 2r_i$. Подставляя закон ОУ, получим

$$\mathcal{D}_i^H(s) = \frac{s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i}\right)}{\sum_j s_j \left(1 - \frac{s_j}{2r_j}\right)} M.$$

Легко заметить, что $\mathcal{D}_i^H(s)$ — возрастающая функция величины $s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i}\right)$. Последняя же достигает максимума при $s_i = r_i$.

Следовательно, при любом числе предприятий $n \geq 2$, единственная ситуация равновесия $s^* = r$ и эффективность закона ОУ $K_{oy} = 1$. Часть прибыли, отчисляемая предприятию i в ситуации равновесия,

$$\mathcal{D}_i^H(s^*) = \frac{r_i}{H} M.$$

Покажем, что в случае нормирования целевых функций образования коалиций не происходит. Действительно, целевая функция коалиции Q предприятий

$$\mathcal{D}_Q^H(s) = \frac{\sum_{i \in Q} s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i}\right)}{\sum_{j=1}^n s_j \left(1 - \frac{s_j}{2r_j}\right)} M$$

достигает максимального значения также при $s_i = r_i$, $i \in Q$, т. е. образование коалиции не меняет ситуации равновесия.

У п р а ж н е н и е 3.9. Определите гарантирующую стратегию предприятия в случае нормированных целевых функций.

Проведенный выше анализ показал, что закон ОУ является эффективным при большом числе предприятий. При малом числе предприятий применение штрафов, адаптивного способа формирования данных, дифференцированных цен или обобщенных оценок, наконец, нормирования целевых функций предоставляет в руки центра достаточный арсенал средств, чтобы обеспечить эффективное функционирование системы даже при наличии предприятия-монополиста.

§ 4. Принцип согласованного управления

Рассмотренные выше два принципа формирования законов управления — принцип ЖЦ и принцип ОУ отражают крайние точки зрения. Так, принцип ЖЦ в первую очередь выдвигает требование минимизации суммарных затрат на выпуск продукции (интересы центра). В основе принципа ОУ лежит требование назначения элементам только «предпочтительных» планов (в первую очередь учитываются интересы элементов). Сравнение этих двух принципов показало определенные преимущества принципа ОУ. Заметим, однако, что интересы центра и предприятий в рассматриваемой нами задаче во многом совпадают. Действительно, рассмотрим сумму целевых функций предприятий

$$\sum_{i=1}^n [\lambda x_i - z_i] = \lambda R - \Phi(z) \rightarrow \max.$$

Вторая составляющая этой суммы $[-\Phi(z)]$ есть не что иное, как целевая функция центра. Близость интересов центра и предприятий выражается также в том, что существует цена $\tilde{\lambda} = \frac{R}{H}$, при

которой планы $\tilde{x}_i = \tilde{\lambda} r_i$, обеспечивающие максимальную прибыль предприятий, определяют в то же время и оптимальный план с позиций центра. В общем случае, такой близости интересов центра и предприятий может и не быть. Пусть, например, целевая функция центра

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^n p_i z_i, \quad p_i > 0. \quad (4.1)$$

Такой вид целевой функции отражает неэквивалентность затрат различных предприятий с позиций центра. Например, если предприятие i использует дефицитное сырье, то центр может придавать больший вес p_i затратам этого предприятия, или если продукция предприятия i имеет повышенное качество, то для увеличения «веса» этой продукции центр может учитывать с меньшим весом p_i затраты предприятия. Оптимальный план производства в случае целевой функции (4.1)

$$x_i^0 = \frac{r_i}{p_i H(p)} R, \quad H(p) = \sum_{j=1}^n \frac{r_j}{p_j} \quad (4.2)$$

(предлагаем читателям проверить это самостоятельно). Если коэффициенты p_i не все равны между собой, то уже не существует цены λ , при которой план $\{x_i^0\}$ обеспечивал бы максимум прибыли для всех предприятий (таким планом является единственный план $\tilde{x}$). Как было показано выше, для закона ОУ при достаточно большом числе предприятий план x^* в ситуации равновесия близок к плану $\tilde{x}$, который в данном случае не является оптимальным планом.

Рассмотрим следующий закон ЖЦ:

$$x_i(s) = \frac{s_i}{p_i} \lambda(s), \quad \lambda(s) = \frac{R}{S(p)}, \quad S(p) = \sum_j \frac{s_j}{p_j}. \quad (4.3)$$

Обозначим $\tau_i(s_i) = s_i/p_i$, $T(s) = \sum_{i=1}^n \tau_i(s_i) = S(p)$ и подставим закон (4.3) в целевые функции предприятий

$$\lambda x_i - \frac{1}{2r_i} x_i^2 = \frac{R^2}{T^2(s)} \tau_i(s_i) \left[1 - \frac{\tau_i(s_i)}{2r_i} \right].$$

Предположим теперь, что границы $[d, D]$ достаточно широки, так что ситуация равновесия s^* лежит внутри области возможных ситуаций. В этом случае система уравнений для определения ситуации равновесия имеет вид

$$\tau_i^* = r_i \frac{T_i^*}{r_i + T_i^*}, \quad T_i^* = T^* - \tau_i^*, \quad (4.4)$$

где $\tau_i^* = \tau_i(s_i^*)$, $T^* = T(s^*)$.

Легко видеть, что эта система с точностью до обозначений совпадает с (3.5). Таким образом, при достаточно большом числе предприятий $\tau^* \approx \gamma$ и, следовательно, $x^* \approx \tilde{x}$, $\lambda^* \approx \tilde{\lambda}$.

Вывод довольно интересен. Закон ЖЦ и закон ОУ оказались эквивалентными в том смысле, что план и цена в соответствующих ситуациях равновесия совпадают. Этот вывод справедлив не только для закона ЖЦ, но и для любого закона вида

$$x_i(s) = \frac{\tau_i(s_i)}{T(s)} R, \quad \lambda(s) = \frac{R}{T(s)}, \quad (4.5)$$

где $\tau_i(s_i)$ — строго монотонная, непрерывно дифференцируемая функция s_i . Действительно, система (4.4) определяет ситуацию равновесия для любого закона (4.5), если $d\tau_i(s_i)/ds_i \neq 0$. Заметим теперь, что закон (4.5) можно получить как решение следующей задачи:

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{2s_i} x_i^2 \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n x_i = R, \quad (4.6)$$

$$\lambda x_i - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} x_i^2 = \max_z \left(\lambda z - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} z^2 \right). \quad (4.7)$$

При $\tau_i(s_i) = s_i$ получаем закон ОУ, а при $\tau_i(s_i) = s_i/p_i$ получаем рассмотренный выше закон ЖЦ.

В общем случае функция $\lambda x_i - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} x_i^2$ уже не является оценкой целевой функции предприятия. Однако ее роль в зада-

че (4.6), (4.7) аналогична роли функции $\lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2$ в законе ОУ.

А именно она служит для выражения предпочтений предприятий к различным планам. Сообщая оценку s_i , предприятие как бы информирует центр, что при цене λ самый предпочтительный для него план $\lambda \tau_i(s_i)$ — это план, обеспечивающий максимум функции $\lambda x_i - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} x_i^2$. Поэтому $\lambda x_i - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} x_i^2$ по-прежнему будем называть функцией предпочтения, условия (4.7) — условиями согласования, а задачу (4.6), (4.7) — задачей согласованного планирования. Принцип формирования законов управления, состоящий в решении некоторой задачи согласованного планирования, будем называть *принципом согласованного управления* (СУ). Конкретные законы согласованного управления получаются при выборе конкретных функций предпочтения для всех предприятий и процедуры выбора решения (если решение задачи согласованного планирования не единственно). Множество законов СУ достаточно широко. В него входят и законы ЖЦ (например, если функция предпочтения не зависит от плана) и законы ОУ (если функция предпочтения является оценкой целевой функции предприятия). Если обозначить $\eta_i(\lambda, x_i, s_i)$ — некоторую функцию предпочтения i -го предприятия, $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ — целевую функцию системы (центра), то в общем виде закон СУ для задачи производства продукции можно записать как решение задачи согласованного планирования (СП):

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \rightarrow \min, \sum_{i=1}^n x_i = R, x_i \geq 0, \quad (4.8)$$

$$\eta_i(\lambda, x_i, s_i) = \max_z \eta_i(\lambda, z, s_i). \quad (4.9)$$

Доказанный выше факт эквивалентности всех законов вида (4.5) можно теперь сформулировать как свойство инвариантности законов СУ с функциями предпочтения $\lambda x_i - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} x_i^2$ (инвариантность понимается в смысле независимости равновесных планов $\mathbf{x}^*$ и цены λ^* от вида функций $\tau_i(s_i)$). Ситуация равновесия $\mathbf{s}^*$, конечно, зависит от $\tau_i(s_i)$ и определяется из уравнений

$$\tau_i(s_i^*) = s_i^{\text{oy}},$$

где s^{oy} — ситуация равновесия для закона ОУ. Например, при $\tau_i = s_i/p_i$ имеем $s_i^* = p_i s_i^{\text{oy}}$.

Отмеченное свойство инвариантности в определенном смысле имеет место и для более общих законов управления и для более общих моделей. К рассмотрению этих вопросов мы сейчас и перейдем.

§ 5. Гипотеза слабого влияния

Выше мы показали, что для законов СУ при достаточно большом числе предприятий равновесный план близок к оптимальному. Разберемся теперь более детально, в чем причина этого факта. Запишем условия равновесия для произвольного закона $\pi(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$, предполагая, что равновесие достигается внутри области возможных ситуаций, т. е. $s^* \in (d, D)$. Будем предполагать, что $\lambda(s)$, $\{x_i(s)\}$ — непрерывно дифференцируемые функции $\{s_i\}$. Имеем

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i(s)}{\partial s_i} = \left(\lambda - \frac{x_i}{r_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial s_i} + x_i \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} = 0, \quad (5.1)$$

или при $\frac{\partial x_i}{\partial s_i} \neq 0$, $\lambda > 0$

$$1 - \frac{x_i}{\lambda r_i} = - \frac{x_i \frac{\partial \lambda}{\partial s_i}}{\lambda \frac{\partial x_i}{\partial s_i}}. \quad (5.2)$$

Предположим теперь, что с увеличением числа предприятий правые части этих уравнений стремятся к 0. Тогда $x_i^* \approx \lambda^* r_i$, а так как

$\sum_{i=1}^n x_i^* = R$, то $\lambda^* \approx R/H = \tilde{\lambda}$ и, следовательно, $x_i^* \approx \tilde{x}_i$.

Уменьшение правых частей системы (5.2) в свою очередь связано с уменьшением влияния отдельного предприятия на цену продукции при увеличении числа предприятий. Формально это можно выразить в виде условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} \right| = 0. \quad (5.3)$$

Условие (5.3) будем называть условием слабого влияния. Если известно, что цена в ситуации равновесия ограничена снизу $\lambda^* \geq \lambda_{\min} > 0$ при любом числе предприятий, то условие слабого влияния можно записывать в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} \right| = 0. \quad (5.4)$$

В частности, для закона ОУ мы имели

$$\lambda = \frac{R}{S}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} = - \frac{R}{S^2},$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nd} = 0.$$

Заметим, что факт слабого влияния отдельного предприятия на цену продукции при достаточно большом числе предприятий (и отсутствии монополистов) хорошо известен в реальных экономических системах. В этом случае разумной представляется следующая гипотеза поведения предприятий: при сообщении информации предприятие не учитывает влияния этой информации на цену. Действительно, в условиях реального производства с его неопределенностью и случайными возмущениями учет «слабых эффектов» не имеет практического смысла. Приведенную выше гипотезу о поведении предприятий на этапе формирования данных будем называть гипотезой слабого влияния (СВ)₁. При гипотезе (СВ)₁ условия равновесия будут отличаться от (5.1). Будем называть соответствующую ситуацию точкой Нэша при гипотезе слабого влияния или просто ситуацией равновесия, если известно, что поведение предприятий определяется гипотезой слабого влияния. Уравнения для определения ситуации равновесия

$$\left(\lambda^* - \frac{x_i^*}{r_i}\right) \frac{\partial x_i^*}{\partial s_i} = 0,$$

или, учитывая, что $\frac{\partial x_i^*}{\partial s_i} \neq 0$, $\sum_i x_i^* = R$, получаем

$$x_i^* = \lambda^* r_i, \quad (5.5)$$

$$x_i^* = \frac{r_i}{H} R = \tilde{x}_i, \quad \lambda^* = \frac{R}{H} = \tilde{\lambda}.$$

Таким образом, любому закону управления $\pi(s)$, удовлетворяющему естественным условиям

$$\sum_{i=1}^n x_i(s) = R, \quad \frac{\partial x_i(s)}{\partial s_i} \neq 0,$$

соответствует в ситуации равновесия при гипотезе слабого влияния один и тот же план $\tilde{x}$ и цена $\tilde{\lambda}$. Напоминаем, что предполагается существование равновесия внутри области $[d, D]$, или, другими словами, существование решения системы уравнений

$$x_i(s^*) = \tilde{x}_i$$

такого, что $d < s_i^* < D$. Это требование, конечно, ограничивает множество инвариантных законов управления. Среди них закон ОУ обладает дополнительным свойством: в ситуации равновесия при гипотезе слабого влияния все предприятия сообщают достоверные оценки коэффициентов эффективности производства. Это свойство немедленно следует из условий равновесия (5.5) и условий совершенного согласования (3.3) $x_i^* = \lambda^* r_i = \lambda^* s_i^*$, $s_i^* = r_i$. Достоверность сообщаемой информации выгодно отличает закон

ОУ от других инвариантных законов управления. Это свойство становится особенно важным, если целевая функция системы $\Phi(z, w)$ зависит не только от затрат z_i , но и от планируемых затрат $w_i = \frac{1}{2s_i} x_i^2$. Действительно, при отклонении планируемых затрат w_i от реальных z_i система несет дополнительные потери, т. е. $\Phi(z, w) < \Phi(z, z)$, если $w \neq z$. В этих условиях оптимальным будет закон, обеспечивающий достоверность сообщаемой информации, т. е. закон ОУ,

§ 6. Теоремы о слабом влиянии и квазиинвариантности

Покажем, что свойство инвариантности законов управления при гипотезе слабого влияния справедливо и для моделей с функциями $3_i(x_i)$ более общего вида, чем $x_i^2/2r_i$. Будем предполагать в этом пункте, что $3_i(x_i)$ — строго выпуклые, непрерывно дифференцируемые, возрастающие функции x_i , причем задача

$$\sum_{i=1}^n 3_i(x_i) \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n x_i = R, \quad x_i \geq 0$$

имеет положительное решение $\tilde{x} > 0$.

Рассмотрим произвольный закон планирования

$$x_i(s) = \xi_i(\lambda, s_i), \quad (6.1)$$

где ξ_i — строго возрастающая непрерывно дифференцируемая функция s_i и λ с ограниченными производными, причем $\xi_i(0, s_i) = 0$, $\frac{\partial \xi_i}{\partial \lambda} \geq \varepsilon > 0$.

Закон ценообразования $\lambda(s)$ определим как решение уравнения

$$\sum_{i=1}^n \xi_i(\lambda, s_i) = R, \quad (6.2)$$

Предполагаем, что уравнение (6.2) имеет решение $\lambda \geq \lambda_{\min} > 0$ при любых возможных значениях s , и следовательно, закон управления $\{\lambda(s), x(s)\}$ определен для любых $s \in [d, D]$.

Законы управления (6.1), (6.2), удовлетворяющие приведенным условиям, будем называть законами минимально разумного управления (МРУ). Наконец, примем как и в предыдущем пункте, что равновесие достигается внутри области $[d, D]$. Условия равновесия при гипотезе слабого влияния

$$\frac{\partial}{\partial s_i} (\lambda x_i - 3_i(x_i)) = \left(\lambda^* - \frac{d 3_i}{dx_i} \right) \frac{\partial \xi_i}{\partial s_i} = 0,$$

или с учетом того, что $\frac{\partial \xi_i}{\partial s_i} > 0$,

$$\frac{d Z_i(x_i^*)}{dx_i} = \lambda^*. \quad (6.3)$$

Однако (6.3) есть не что иное, как необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи минимизации затрат $\sum_{i=1}^n Z_i(x_i)$ при условии $\sum_{i=1}^n x_i = R$. Следовательно, $x_i^* = \tilde{x}_i$ для любого закона (6.1), (6.2). Разрешим уравнение $x_i = \xi_i(\lambda, s_i)$ относительно λ :

$$\lambda = \xi_i(x_i, s_i). \quad (6.4)$$

Рассмотрим функцию

$$\eta_i(\lambda, x_i, s_i) = \lambda x_i - \int_0^{x_i} \xi_i(y, s_i) dy. \quad (6.5)$$

Поскольку $\xi_i(x_i, s_i)$ — возрастающая функция x_i , то функция $\psi_i(x_i, s_i) = \int_0^{x_i} \xi_i(y, s_i) dy$ является выпуклой. Поэтому условие (6.4) или (6.1) является необходимым и достаточным условием максимума по x_i функции (6.5). Если теперь рассмотреть закон СУ с функциями предпочтения (6.5), то, как легко видеть, это и будет закон (6.1), (6.2).

Полученные результаты показывают, что свойство инвариантности законов СУ при гипотезе слабого влияния имеет место для достаточно произвольных зависимостей $Z_i(x_i)$. Возникает вопрос, насколько правдоподобна гипотеза слабого влияния для этого более сложного случая. Вернемся к прежнему понятию равновесия Нэша без гипотезы слабого влияния. Пусть число предприятий в системе неограниченно возрастает. Чтобы при этом цена продукции и планы выпуска не стремились к 0, примем, что одновременно растет и спрос на продукцию $Bn \geq R \geq bn$ ($b > 0$, $B < \infty$). Точнее следует сказать наоборот, что число предприятий растет как следствие повышения спроса на продукцию. Чтобы исключить появление монополистов или бесконечно малых предприятий, примем, что функции затрат $Z_i(x_i)$ всех предприятий ограничены сверху и снизу при любых $0 \leq x_i \leq R$, т. е. $Z_{\min}(x_i) \leq Z_i(x_i) \leq Z_{\max}(x_i)$, где $Z_{\min}$, $Z_{\max}$ обладают всеми свойствами функций $Z_i(x_i)$. Обозначим $\tilde{x}(n)$ — оптимальный план задачи, $x^*(n)$ — равновесный план, $\lambda^*(n)$ — равновесная цена, $\tilde{\lambda}(n) = dZ_i[\tilde{x}_i(n)]/dx_i$ — множитель Лагранжа в системе из n предприятий.

Теорема 1.1 (о слабом влиянии). Для любого закона МРУ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} = 0.$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (6.2), получаем

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s_i} \sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial \lambda} + \frac{\partial \xi_i}{\partial s_i} = 0, \quad (6.6)$$

$$\left| \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} \right| = \frac{\frac{\partial \xi_i}{\partial s_i}}{\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial \lambda}} \leq \frac{\text{const}}{n\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теорема 1.2 (о квазиинвариантности). Для любого закона МРУ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_i^*(n) - \tilde{x}_i(n)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda^*(n) - \tilde{\lambda}(n)| = 0.$$

Доказательство. Условия равновесия Нэша имеют вид

$$\left[\lambda - \frac{dZ_i(x_i)}{dx_i} \right] = - \frac{x_i \frac{\partial \lambda}{\partial s_i}}{\frac{\partial x_i}{\partial s_i}} = - \frac{x_i \frac{\partial \lambda}{\partial s_i}}{\frac{\partial \xi_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial s_i}}.$$

Учитывая (6.6), получаем

$$\left| \lambda^*(n) - \frac{dZ_i[x_i^*(n)]}{dx_i} \right| = \frac{x_i}{\sum_{j \neq i} \frac{\partial \xi_j}{\partial \lambda}} \leq \frac{\text{const}}{(n-1)\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Обозначая $\Theta_i(\lambda)$ функцию, обратную $dZ_i(x_i)/dx_i$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_i^*(n) - \Theta_i[\lambda^*(n)]| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| R - \sum_i \Theta_i[\lambda^*(n)] \right| = 0.$$

Учитывая, что $\sum_i \Theta_i[\tilde{\lambda}(n)] = R$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_i \Theta_i[\tilde{\lambda}(n)] - \sum_i \Theta_i[\lambda^*(n)] \right| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{\lambda}(n) - \lambda^*(n)| = 0.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_i^*(n) - \Theta_i(\tilde{\lambda}(n))| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_i^*(n) - \tilde{x}_i(n)| = 0.$$

Теорема доказана.

Теоремы 1.1 и 1.2, по существу, являются обоснованием гипотезы слабого влияния при достаточно большом числе предприятий. Для того чтобы получить предельную теорему о близости сообщаемой информации к достоверной для закона ОУ, рассмотрим функции затрат вида $Z_i(x_i, r_i)$, где r_i коэффициент эффективности производства. Для закона ОУ имеем в равновесии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{dZ_i[x_i^*(n), r_i]}{dx_i} - \lambda^*(n) \right| = 0, \quad \frac{dZ_i[x_i^*(n), s_i^*(n)]}{dx_i} = \lambda^*(n)$$

и, если dZ_i/dx_i — непрерывные функции r_i ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_i - s_i^*(n)| = 0,$$

где $\{s_i^*(n)\}$ ситуация равновесия Нэша в системе из n предприятий.

§ 7. Оптимальность принципа открытого управления

Предыдущие результаты об инвариантности законов СУ при гипотезе слабого влияния могут вызвать у читателя определенный пессимизм. Действительно, как ни управляй, а в результате система придет в одно и то же состояние равновесия! Дело здесь, конечно, в том, что определенное нами равновесие при гипотезе слабого влияния в данном случае является единственным. Что будет происходить, если равновесий Нэша при гипотезе слабого влияния несколько? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала простой пример, считая $Z_i(x_i) = x_i^2/2r_i$. Пусть количество R выпускаемой продукции не задано, а вся произведенная продукция реализуется по цене μ . Примем целевую функцию системы

$$\Phi(x, z) = \sum_{i=1}^n (\mu x_i - p_i z_i) \rightarrow \max. \quad (7.1)$$

Рассмотрим ситуации равновесия при гипотезе слабого влияния

$$x^* = \lambda^* g. \quad (7.2)$$

Поскольку ограничений на $\sum_{i=1}^n x_i^*$ нет, то при любой цене λ^* , план $x^* = \lambda^* g$ будет определять ситуацию равновесия. Соответствующая равновесная стратегия s_i^* определяется из уравнения

$$\lambda^* r_i = \xi_i(\lambda^*, s_i^*).$$

Таким образом, в данном случае равновесных ситуаций много. Какая из них является оптимальной? Подставляя (7.2) в (7.1),

получим

$$\Phi^* = \lambda \mu H - \sum_{i=1}^n \frac{p_i r_i}{2} \lambda^2.$$

Максимум этого выражения достигается при

$$\tilde{\lambda} = \frac{\mu H}{\sum_{j=1}^n p_j r_j}, \quad \tilde{x} = \tilde{\lambda} r. \quad (7.3)$$

Теперь уже не любой закон управления будет обеспечивать максимально возможное значение целевой функции центра. Так, например, для закона $\xi_i(\lambda, s_i) = \lambda s_i$, $\lambda = \mu$ имеем в ситуации равновесия $x_i^* = \mu r_i \neq \tilde{x}_i$, если $\sum_j p_j r_j \neq H$. В то же время закон ОУ

позволяет получить в ситуации равновесия $x^* = \tilde{x}$. Действительно, закон ценообразования $\lambda(s)$ в законе ОУ определится как решение задачи

$$\lambda \mu S - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i s_i \lambda^2 \rightarrow \max.$$

Несложные вычисления дают

$$\lambda(s) = \frac{\mu S}{\sum_{j=1}^n p_j s_j}.$$

А так как для закона ОУ ситуация равновесия $s^* = r$, то $\lambda(s^*) = \tilde{\lambda}$, т. е. равна оптимальной цене.

Таким образом, закон ОУ является в данном случае оптимальным законом управления. Существуют и другие оптимальные законы, например, все законы вида

$$x_i = \xi_i(\lambda, s_i) = \lambda \tau_i(s_i), \quad \lambda(s) = \mu T(s) / \sum_i p_i \tau_i(s_i), \quad (7.3)$$

где $T(s) = \sum_i \tau_i(s_i)$, $\tau_i(s_i)$ — строго монотонные функции s_i . Дей-

ствительно, в ситуации равновесия $\tau_i^* = \tau_i(s_i^*) = r_i$ и, следовательно, $\lambda^* = \tilde{\lambda}$. Заметим, что закон ОУ единственный среди них обеспечивает достоверность информации в ситуации равновесия при любых $r_i \in [d, D]$. Тем не менее законы (7.3) остаются оптимальными, даже если в целевой функции центра учесть потери от отклонения реальных затрат z_i от планируемых w_i . Только в этом случае планируемые затраты следует вычислять по формуле $w_i =$

$$= \frac{1}{2\tau_i(s_i)} x_i^2, \text{ что обеспечивает в ситуации равновесия } w_i^* = w_i(s_i^*) = \\ = \frac{1}{2r_i} x_i^2 = z_i^*, \text{ т. е. совпадение реальных и планируемых затрат.}$$

Предыдущие рассуждения можно обобщить и на более сложные модели. Рассмотрим произвольную целевую функцию центра $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ и целевые функции предприятий $f_i(\lambda, x_i, z_i) = \lambda x_i - z_i$. Так как $f_i(\lambda, x_i, z_i)$ убывающие функции z_i , то можно положить $z_i = Z_i(x_i, r_i)$ и

$$f_i(\lambda, x_i, z_i) = \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \lambda x_i - Z_i(x_i, r_i),$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{x}, \{Z_i(x_i, r_i)\}) = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{r}).$$

Пусть X произвольное замкнутое ограниченное множество возможных планов $\mathbf{x} = \{x_i\}$. Рассмотрим множество G^1 законов управления таких, что для любого закона из этого множества условия равновесия при гипотезе слабого влияния имеют вид

$$\varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \max_y \varphi_i(\lambda, y, r_i). \quad (7.4)$$

Обозначим $A(\mathbf{r})$ множество равновесных планов, т. е. планов $\mathbf{x} \in X$, удовлетворяющих (7.4) при некотором $\lambda \geq 0$. Оптимальным законом управления будет закон, при котором равновесный план обеспечит минимум целевой функции $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ на множестве $A(\mathbf{r})$. Рассмотрим закон ОУ

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \lambda \geq 0, \quad (7.5)$$

$$\varphi_i(\lambda, x_i, s_i) = \max_y \varphi_i(\lambda, y, s_i). \quad (7.6)$$

Очевидно, что ситуация $\mathbf{s}^* = \mathbf{r}$ является равновесием при гипотезе слабого влияния, поскольку условия (7.6) при $\mathbf{s}^* = \mathbf{r}$ совпадают с условиями равновесия (7.4). Более того, эта ситуация не хуже любой другой. Действительно, пусть $\mathbf{s}^*$ ситуация равновесия и $s_i^* \neq r_i$. Рассмотрим ситуацию $\mathbf{s} = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, r_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$. Имеем при гипотезе слабого влияния

$$\varphi_i(\lambda^*, x_i(\mathbf{s}^*), r_i) = \max_y \varphi_i(\lambda^*, y, r_i) = \varphi_i(\lambda^*, x_i(\mathbf{s}), r_i),$$

т. е. сообщая r_i вместо s_i^* , предприятие «не проигрывает».

Предполагая наличие слабых штрафов в системе за сообщение недостоверной информации (например, чисто моральный стимул сообщать достоверные сведения при прочих равных условиях), мы можем принять, что $\mathbf{s}^* = \mathbf{r}$ — единственная ситуация равновесия при гипотезе слабого влияния для закона ОУ. А в этом случае решение задачи (7.5), (7.6) определяет наилучший равновесный план. Таким образом, закон ОУ является оптимальным среди всех законов множества G^1 .

§ 8. Критериальное управление

В предыдущем пункте мы доказали оптимальность принципа ОУ на множестве G^1 законов управления при гипотезе слабого влияния. Обозначим $\Psi_{oy}(r)$ значение целевой функции центра в ситуации равновесия $s^*=r$ для закона ОУ (т. е. оптимальное значение целевой функции в задаче согласованного планирования (7.5), (7.6) при $s=r$). Обозначим далее $\Psi_m(r)$ — оптимальное значение целевой функции в решении задачи оптимального планирования:

$$\Psi(x, r) \rightarrow \min, x \in X \quad (8.1)$$

Очевидно, что $\Psi_{oy}(r) \geq \Psi_m(r)$. Примем, что $\Psi_{oy}(r) > 0$ и определим

$$K_{oy} = \min_{r \in \Omega} \frac{\Psi_m(r)}{\Psi_{oy}(r)} \leq 1, \quad (8.2)$$

где $\Omega = \prod_i [d_i, D_i]$. Коэффициент K_{oy} назовем критерием эффективности закона ОУ (или просто эффективностью закона ОУ). Аналогично можно определить эффективность любого закона управления $\pi(s)$

$$K_{\pi} = \min_{r \in \Omega} \frac{\Psi_m(r)}{\Psi_{\pi}(r)},$$

где $\Psi_{\pi}(r) = \max_{s^* \in Q(r)} \Psi(x(s^*), r)$,

$Q(r)$ — множество ситуаций равновесия при гипотезе слабого влияния. Очевидно, что эффективность любого закона из множества G^1 не превышает K_{oy} . Случай $K_{oy} = 1$ свидетельствует об определенной близости интересов центра и предприятий (например, в задаче производства продукции, когда целевая функция центра равна суммарным затратам на производство продукции). Если $K_{oy} \ll 1$, то интересы центра и предприятий в существенной степени не совпадают. Это свидетельствует о несовершенстве системы стимулирования. Повышение эффективности функционирования системы возможно путем изменения целевых функций предприятий (*критериальное управление*). Рассмотрим, например, целевую функцию центра

$$\Psi(x, r) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{2r_i} x_i^2. \quad (8.3)$$

При целевых функциях предприятий

$$\varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \lambda x_i - \frac{1}{2r_i} x_i^2,$$

эффективность закона ОУ равна

$$K_{oy} = \min_{\{r_i\}} \frac{\left(\sum_i r_i\right)^2}{\left(\sum_i p_i r_i\right) \left(\sum_i \frac{r_i}{p_i}\right)} \leq \frac{n^2}{\left(\sum_i p_i\right) \left(\sum_i \frac{1}{p_i}\right)}.$$

Так, если $n=2$, $p_1=1$, $p_2=9$, то $K_{oy} \leq 4/10(1+1/9) \approx 0,36$. Однако достаточно взять в качестве целевых функций предприятий

$$\varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \lambda x_i - \frac{p_i}{2r_i} x_i^2, \quad (8.4)$$

и для закона ОУ критерий эффективности будет равен 1.

Аналогично для задачи с целевой функцией центра

$$\Psi(x, r) = \sum_{i=1}^n \left(\mu x_i - \frac{p_i}{2r_i} x_i^2 \right)$$

выбор целевых функций предприятий в виде (8.4) обеспечивает максимальную эффективность $K_{oy}=1$ закона открытого управления

$$x_i = \mu s_i / p_i, \quad \lambda = \mu.$$

Особой формой критериального управления можно считать нормирование целевых функций и введение дифференцированных по предприятиям цен. Разобьем предприятия на m групп так, чтобы в каждой группе было не менее двух предприятий и будем устанавливать для каждой группы k свою цену продукции λ_k . Кроме того, для каждой группы выделим фонд материального поощрения Φ_k . Применяя нормирование целевых функций предприятий одной группы, мы обеспечим для закона открытого управления достоверность сообщаемых оценок коэффициентов эффективности, так как число предприятий в каждой группе не менее двух. Обозначим Q_k — множество предприятий, входящих в k -ю группу. Имеем для предприятия $i \in Q_k$ $x_i = \lambda_k r_i$ и, следовательно,

$$\Psi(x, r) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{2r_i} \lambda_k^2 r_i^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i \in Q_k} \frac{1}{2} p_i r_i \lambda_k^2.$$

Обозначим $\sum_{i \in Q_k} p_i r_i = A_k$, $\sum_{i \in Q_k} r_i = H_k$, $k = 1 \div m$. Задача производства продукции сводится к определению цен $\{\lambda_k\}$ таких, что

$$\Psi = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} A_k \lambda_k^2 \rightarrow \min,$$

при условии

$$\sum_{k=1}^m H_k \lambda_k = R.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем

$$\lambda_k = \frac{H_k R}{A_k \sum_j \frac{H_j^2}{A_j}}, \quad k = 1 \div m,$$

$$\Psi_Q = \frac{1}{2} R^2 \left(\sum_{k=1}^m \frac{H_k^2}{A_k} \right)^{-1} = \frac{1}{2} R^2 \left[\sum_{k=1}^m \frac{\left(\sum_{i \in Q_k} r_i \right)^2}{\sum_{i \in Q_k} p_i r_i} \right]^{-1}.$$

Учитывая, что $\Psi_m = R^2/2H(p)$, где $H(p) = \sum_{i=1}^n r_i/p_i$, мы можем оценить эффективность разбиения предприятий на группы

$$K_Q = \min_{\{r_i\}} \frac{1}{H(p)} \sum_{k=1}^m \frac{H_k^2}{A_k}.$$

Поставим задачу определить разбиение предприятий на группы, при котором K_Q максимально. Эта задача является довольно сложной экстремальной комбинаторной задачей. Она решается довольно просто, если существует допустимое разбиение предприятий на группы такое, что $p_i = p_k$ для всех $i \in Q_k$, (т. е. значения коэффициентов p_i у предприятий одной группы совпадают). Тогда такое разбиение является оптимальным и $K_Q = 1$. Действительно

$$\frac{1}{H(p)} \sum_{k=1}^m \frac{H_k^2}{A_k} = \frac{1}{H(p)} \sum_{k=1}^m \frac{H_k}{p_k} = 1.$$

Этот результат дает нам простое эвристическое правило: разбивать предприятия на группы с близкими значениями p_i . Простые критерии качества разбиения можно получить, заменяя задачу максимизации K_Q на задачу максимизации его верхней или нижней оценки. Так, например, полагая все $r_i = \text{const}$ (очевидно, это дает оценку сверху), получаем критерий

$$\hat{K}_Q = \left(\sum_k \frac{n_k^2}{P_k} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \right)^{-1}, \quad P_k = \sum_{i \in Q_k} p_i,$$

где $n_k = |Q_k|$. Заметим, что $\hat{K}_Q$ также равно 1, если существует допустимое разбиение на группы с равными p_i у предприятий

одной группы. Пусть предприятия упорядочены по возрастанию p_i , т. е. $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$. Можно показать, что существует разбиение, оптимальное по критерию $\hat{K}_Q$, удовлетворяющее следующему условию: если $i, j \in Q_k$ и существует $i < l < j$, то и $l \in Q_k$. Это свойство оптимального разбиения позволяет предложить эффективный алгоритм решения задачи (по критерию $\hat{K}_Q$). Определим граф G с $(n-1)$ вершиной $0, 2, 3, \dots, n-2, n$. Вершины $k, k+2$ соединяем дугой $(k, k+2)$ длины

$$l_{k,k+2} = \frac{4}{p_{k+1} + p_{k+2}}.$$

Вершины $k, k+3$ соединяем дугой $(k, k+3)$ длины

$$l_{k,k+3} = \frac{9}{p_{k+1} + p_{k+2} + p_{k+3}}.$$

Определяем путь μ максимальной длины, соединяющий вершину 0 с вершиной n . Длина этого пути равна максимальному значению $\hat{K}_Q\left(\sum_1^n \frac{1}{p_i}\right)$. Оптимальное разбиение определяется следующим образом: если $(k, j) \in \mu$, то предприятия с номерами $(k+1) \div j$ входят в одну группу.

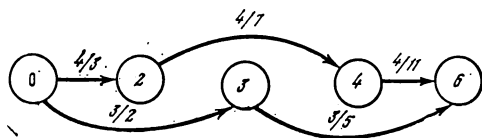


Рис. 1.4

Пример. Пусть $p_i = i$, $i = 1 \div 6$. Граф G приведен на рис. 1.4 (длины l_{kj} указаны у соответствующих дуг). В данном случае существуют всего два пути $\mu_1 = (0, 2, 4, 6)$ длины $L_1 = 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11}\right) = \frac{542}{241} \approx 2,2$ и $\mu_2 = (0, 3, 6)$ длины $L_2 = 9\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{15}\right) = 2,1$. Путь максимальной длины L_1 определяет разбиение предприятий на 3 группы $Q_1 = (1, 2)$, $Q_2 = (3, 4)$ и $Q_3 = (5, 6)$.

Упражнение 8.1. Проведите обоснование алгоритма, т. е. докажете, что алгоритм обеспечивает оптимальное по критерию $\hat{K}_Q$ разбиение предприятий на группы.

§ 9. Сильные штрафы

Эффективность функционирования системы можно увеличить, повышая ответственность предприятий за соответствие реальных затрат и планируемых. Так, например, пусть предприятию уста-

навливается план по прибыли

$$f_i^{\text{пл}} = \lambda x_i - w_i.$$

При отклонении реальной прибыли $f_i = \lambda x_i - z_i$ от планируемой предприятие штрафует. Примем функцию штрафа

$$f_i^{\text{ш}} = \begin{cases} \alpha (f_i^{\text{пл}} - f_i), & \text{если } f_i^{\text{пл}} \geq f_i, \\ \beta (f_i - f_i^{\text{пл}}), & \text{если } f_i \geq f_i^{\text{пл}}, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta > 0$.

С учетом штрафов целевая функция предприятия примет вид

$$f_i(\lambda, x_i, z_i, w_i) = \lambda x_i - z_i - \begin{cases} \alpha (z_i - w_i), & \text{если } z_i \geq w_i, \\ \beta (w_i - z_i), & \text{если } w_i \geq z_i. \end{cases} \quad (9.1)$$

Пусть $\beta < 1$. Тогда $f_i(\lambda, x_i, z_i, w_i)$ — убывающая функция z_i и поэтому реальные затраты равны минимальным $\frac{1}{2r_i} x_i^2$. Предполагая, что планируемые затраты определяются по формуле $w_i = \frac{1}{2s_i} x_i^2$, получаем

$$\Phi_i(\lambda, x_i, r_i, s_i) = \lambda x_i - \frac{1}{2r_i} x_i^2 - \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha x_i^2 \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{s_i} \right), & r_i \leq s_i, \\ \frac{1}{2} \beta x_i^2 \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i} \right), & r_i \geq s_i. \end{cases}$$

Если $\beta \geq 1$, то целевая функция (9.1) достигает максимальной величины при $z_i = w_i = \frac{1}{2s_i} x_i^2$. В этом случае при $s_i \leq r_i$ реальные затраты совпадают с планируемыми и

$$f_i(\lambda, x_i, w_i, w_i) = \Phi_i(\lambda, x_i, s_i) = \lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2. \quad (9.2)$$

Заметим, что изменение коэффициентов α, β приводит к изменению целевой функции предприятия. Таким образом, введение штрафов также является особым вида критериальным управлением. Проведем исследование так называемого случая сильных штрафов, когда штрафы за отклонение реализации от плана настолько велики, что единственной разумной линией поведения предприятия является безусловное выполнение принятых обязательств. Заметим, что требование совпадения реализации и плана может носить и не экономический характер, а быть чисто административным указанием со стороны центра.

Для того чтобы гарантировать выполнение плана по прибыли, предприятие должно сообщать оценку s_i не больше реального коэффициента эффективности r_i , а чтобы не было перевыполнения плана, реальные затраты должны быть равны планируемым,

т. е. $z_i = \frac{1}{2s_i} x_i^2$. Таким образом, в случае сильных штрафов целевые функции предприятий имеют вид (9.2), а множество возможных стратегий $d \leq s_i \leq r_i$. Пусть $\pi(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$ — произвольный закон управления. Предположим, что $\varphi_i(\lambda, x_i, s_i) = \lambda x_i(s) - \frac{1}{2s_i} x_i^2(s)$ возрастающая функция s_i . Тогда, очевидно,

$s^* = r^*$ единственная ситуация равновесия. Обозначим G^{np} множество законов управления, для которых условие монотонности целевых функций по $\{s_i\}$ выполняется. Тогда для любого закона $\pi \in G^{np}$ единственная ситуация равновесия $s^* = r$ (в этом смысле можно говорить об инвариантности законов множества G^{np}). Естественно поставить задачу выбора из множества G^{np} такого закона, который имеет максимальную эффективность. Покажем, во-первых, что закон ОУ принадлежит множеству G^{np} . Действительно, для закона ОУ $x_i = \lambda s_i$ и, следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} = \left(\lambda - \frac{x_i}{s_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial s_i} + \frac{1}{2s_i^2} x_i^2 = \frac{1}{2s_i^2} x_i^2 > 0.$$

Таким образом, оптимальный закон на множестве G^{np} имеет во всяком случае эффективность не меньше, чем лучший закон на множестве G^1 — закон ОУ.

Рассмотрим задачу производства продукции

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^n p_i z_i \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n x_i = R, \quad x_i \geq 0$$

с целевыми функциями предприятий (9.2).

Определим параметрическое множество законов управления

$$x_i = \lambda \tau_i, \quad \lambda(\tau) = \frac{R}{T}, \quad T = \sum_i \tau_i, \quad (9.3)$$

где $\tau_i = \varepsilon s_i + (1-\varepsilon) \frac{s_i}{p_i}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ — параметр. Выпишем условие принадлежности законов (9.3) множеству G^{np} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} &= \left(\lambda - \frac{x_i}{s_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial s_i} + \frac{x_i^2}{2s_i^2} = \lambda^2 \left[1 - \varepsilon - (1-\varepsilon) \frac{1}{p_i} \right] \left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{p_i} \right) + \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \left[\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{p_i} \right]^2 = \lambda^2 \left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{p_i} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1-\varepsilon}{2p_i} \right) > 0, \end{aligned}$$

или $p_i(2-\varepsilon) > 1-\varepsilon$.

Обозначая $p_{\min} = \min_i p_i$, имеем

$$p_{\min} > \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}.$$

Заметим теперь, что чем меньше ε , тем «ближе» закон (9.3) к закону ЖЦ, обеспечивающему оптимальность плана при условии достоверной информации. Минимальное ε , обеспечивающее принадлежность закона (9.3) множеству G^{np} определяется условием

$$\text{если } p_{\min} > \frac{1}{2}, \text{ то } \varepsilon = 0,$$

$$\text{если } p_{\min} \leq \frac{1}{2}, \text{ то } \varepsilon > \frac{1-2p_{\min}}{1-p_{\min}}.$$

На первый взгляд кажется, что при $p_{\min} \leq 1/2$ получить абсолютно оптимальный закон управления с единичной эффективностью не удастся даже в случае сильных штрафов. Однако это не так. Действительно, оптимальное решение не изменится, если целевую функцию центра умножить на некоторое положительное число, т. е. положить

$$\Phi(z) = \gamma \sum_{i=1}^n p_i z_i = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma p_i}{2s_i} x_i^2, \quad \gamma > 0.$$

Это эквивалентно умножению на γ всех p_i . Выберем величину γ таким образом, чтобы $\gamma p_{\min} > 1/2$, т. е. $\gamma > \frac{1}{2p_{\min}}$.

В этом случае при $\varepsilon=0$ закон ЖЦ

$$x_i = \lambda \frac{s_i}{\gamma p_i}, \quad \lambda = \frac{R\gamma}{\sum_j \frac{s_j}{p_j}}$$

принадлежит множеству G^{np} и, следовательно, является абсолютно оптимальным. Таким образом, в случае сильных штрафов для рассмотренной задачи всегда удастся обеспечить абсолютно оптимальное функционирование системы и достоверность сообщаемых оценок. Однако за это приходится «платить» увеличением цены $\lambda^* = \gamma \lambda$, так как $\gamma > 1$. В нашей задаче цена λ не входит в целевую функцию центра. Однако в реальных системах центру, конечно, безразлична цена продукции. Так, если центр оплачивает предприятиям произведенную продукцию по цене λ , то он, возможно, заинтересован в том, чтобы цена λ была поменьше. Наконец, на величину цены могут быть наложены определенные ограничения $\lambda \leq \lambda_{\max}$. В этом случае может оказаться, что закон ЖЦ ($\varepsilon=0$) не принадлежит множеству G^{np} , а оптимальным на множестве законов (9.3) будет некоторый закон согласованного управления ($0 < \varepsilon < 1$).

У п р а ж н е н и е 9.1. Определите оптимальный закон управления вида (9.3), принадлежащий множеству G^{np} , для следующей задачи производства продукции

$$\lambda R + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{2s_i} x_i^2 \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n x_i = R.$$

Целевые функции предприятий возьмите в виде

$$\varphi_i(\lambda, x_i, s_i) = \lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2.$$

§ 10. Адаптивный способ формирования данных

Мы уже рассматривали адаптивный способ формирования данных. Вернемся к нему еще раз, предполагая гипотезу слабого влияния. Итак, пусть оценка $s_{i, k+1}$ коэффициента эффективности производства в периоде $(k+1)$ определяется на основе известного плана x_{ik} и затрат z_{ik} в периоде k

$$s_{i, k+1} = a_{ik} = \frac{x_{ik}^2}{2z_{ik}}. \quad (10.1)$$

Так как $z_{ik} \geq x_{ik}^2 / 2r_i$, то $a_{ik} \leq r_i$. В данном случае стратегией предприятия в периоде k является реальная эффективность производства a_{ik} . Поскольку выбор a_{ik} влияет на план $x_{i, k+1}$, то в целевой функции предприятия следует учесть будущие периоды. Запишем целевую функцию в периоде k с учетом будущих периодов в следующем виде:

$$\eta_{ik} = \lambda_k x_{ik} - \frac{1}{2a_{ik}} x_{ik}^2 + \sum_{q=k+1}^{\infty} \delta_i^{q-k} \left[\lambda_q x_{iq} - \frac{1}{2a_{iq}} x_{iq}^2 \right], \quad (10.2)$$

где $\lambda_q = \lambda(a_{q-1})$, $x_{iq} = x(a_{q-1})$, $q \geq k+1$, δ_i^{q-k} — дисконтирующий множитель, $0 < \delta_i < 1$.

Так как будущие значения λ_q , x_{iq} не известны предприятию в период k , то необходимо ввести определенные гипотезы о поведении предприятия, устраняющие эту неопределенность и позволяющие определить стратегию a_{ik} . Одна из них — это гипотеза слабого влияния, согласно которой предприятие не учитывает влияния реальной эффективности a_{ik} на будущие цены λ_q . Поэтому мы можем принять $\lambda_q = \lambda_k$ для всех $q > k$. Целевая функция (10.2) принимает вид

$$\eta_{ik} = \lambda_k x_{ik} - \frac{1}{2a_{ik}} x_{ik}^2 + \sum_{q=k+1}^{\infty} \delta_i^{q-k} \left[\lambda_k x_{iq} - \frac{1}{2a_{iq}} x_{iq}^2 \right]. \quad (10.3)$$

Так как $x_{iq} = \xi_i(\lambda_q, a_{i, q-1})$, то при гипотезе слабого влияния мы можем положить $x_{iq} = \xi_i(\lambda_k, a_{i, q-1})$, $q \geq k+1$. Теперь целевая функция зависит уже только от последовательности $\{a_{iq}, q \geq k\}$, выбираемой i -ым предприятием. В этой последовательности нас интересует только первый член a_{ik} , т. е. решение, принимаемое в период k . Можно предположить следующую процедуру выбора пред-

приятием i реальной эффективности a_{ik} . Предприятие i решает задачу максимизации (10.3) на множестве всех последовательностей $\{a_{iq}\}$ таких, что $d \leq a_{iq} \leq r_i$ при заданных значениях λ_k, x_{ik} и условиях $x_{iq} = \xi_i(\lambda_k, a_{iq-1})$, $q \geq k+1$. Пусть последовательность $a^0 = \{a_{iq}^0, q \geq k\}$ — оптимальное решение этой задачи. Значение a_{ik}^0 и выбирается в качестве реальной эффективности производства в периоде k . Однако такой способ может оказаться достаточно сложным в условиях реального производства. Рассмотрим более простой вариант. Примем, что предприятие i рассматривает только «простые» последовательности $a_{iq} = a_{ik}$ для всех $q \geq k$ и целевая функция (10.3) принимает вид

$$\eta_{ik} = \left(\lambda_k x_{ik} - \frac{1}{2a_{ik}} x_{ik}^2 \right) + N_i \left[\lambda_k \xi_i(\lambda_k, a_{ik}) - \frac{1}{2a_{ik}} \xi_i^2(\lambda_k, a_{ik}) \right], \quad (10.4)$$

где $N_i = \frac{\delta_i}{1 - \delta_i}$ — степень дальновидности предприятия i . Выражение (10.4) зависит уже только от a_{ik} . Рассмотрим множество G^{np} законов управления. Для любого закона из этого множества функция

$$\varphi_i(\lambda_k, x_{ik}, a_{ik}) = \lambda_k \xi_i(\lambda_k, a_{ik}) - \frac{1}{2a_{ik}} \xi_i^2(\lambda_k, a_{ik})$$

— строго возрастающая функция a_{ik} . Учитывая также, что $\lambda_k x_{ik} - \frac{1}{2a_{ik}} x_{ik}^2$ — строго возрастающая функция a_{ik} , получаем, что единственная ситуация равновесия для любого закона из G^{np} есть $a^* = r$ (причем, независимо от степени дальновидности предприятия). Таким образом, задача выбора оптимального закона управления на множестве G^{np} совпадает с соответствующей задачей для случая сильных штрафов. Более того, можно ослабить условие строгого возрастания для законов из множества G^{np} , а требовать только, чтобы $\varphi_i(\lambda, x_i(a), a_i)$ были неубывающими функциями a_i , так как $\lambda x_i - \frac{1}{2a_i} x_i^2$ является строго возрастающей функцией a_i при любых $x_i > 0$.

У п р а ж н е н и е 10.1. Получите условия, при которых оптимальная простая последовательность является оптимальной и на множестве всех последовательностей.

У п р а ж н е н и е 10.2. Рассмотрите задачу определения оптимальной последовательности для целевых функций вида

$$\eta_{ik} = \lambda_k x_{ik} - \frac{1}{2a_{ik}} x_{ik}^2 + \sum_{q=k+1}^{k+N_i} \left[\lambda_k \xi_i(\lambda_k, a_{iq-1}) - \frac{1}{2a_{iq}} \xi_i^2(\lambda_k, a_{iq-1}) \right],$$

$$\eta_{ik} = \min_{q \geq k} \delta_i^{q-k} \left[\lambda_k \xi_i(\lambda_k, a_{i,q-1}) - \frac{1}{2a_{iq}} \xi_i^2(\lambda_k, a_{i,q-1}) \right],$$

где $\delta_i \geq 1$.

§ 11. Анализ гарантирующих стратегий

До сих пор, проводя исследование законов управления, мы рассматривали ситуацию равновесия в качестве решения соответствующей игры. Однако в ряде случаев определение равновесных стратегий представляет определенные трудности. Рассмотрим, например, закон согласованного управления для задачи производства продукции с функциями предпочтения

$$\eta_i(\lambda, x_i, s_i) = 1 \left[\left(\lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2 \right) - \frac{\varepsilon}{2} \lambda^2 s_i \right], \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (11.1)$$

где $1[u] = 1$ при $u \geq 0$ и $1[u] = 0$ при $u < 0$.

Условия согласования с функциями предпочтения (11.1) можно записать в виде

$$\lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2 \geq \frac{\varepsilon}{2} \lambda^2 s_i = \varepsilon \max_y \left(\lambda y - \frac{1}{2s_i} y^2 \right). \quad (11.2)$$

Закон СУ с функциями предпочтения (11.1) называется законом ε -согласованного управления. Случай $\varepsilon = 1$ соответствует закону ОУ, а $\varepsilon = -\infty$ — закону ЖЦ.

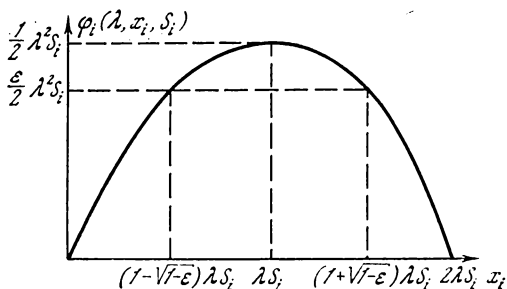


Рис. 1.5

Из (11.2) легко видеть смысл условий (11.1). Центр гарантирует предприятиям план в некоторой окрестности $A_i(\lambda, s_i)$ наиболее предпочтительного плана λs_i . Эта окрестность определяется условиями (рис. 1.5)

$$|x_i - \lambda s_i| \leq (\sqrt{1-\varepsilon}) \lambda s_i. \quad (11.3)$$

$A_i(\lambda, s_i)$ определяет множество согласованных планов, т. е. множество планов, удовлетворяющих условиям согласования. В данном случае уже трудно выпisać закон управления в явном виде $\{\lambda(s), x(s)\}$, что вызывает затруднения и при анализе ситуаций равновесия. Заметим, что затруднения возникают не только у исследователя, но и у предприятий. Разумно предположить, что в этих условиях поведение предприятий становится более осторожным. Формальным выражением такого осторожного поведения может служить принцип максимального гарантированного ре-

зультата. Согласно этому принципу, предприятие выбирает такую стратегию, которая обеспечивает максимальное значение целевой функции в «наихудших условиях». Для встречного способа формирования данных и законов согласованного управления принцип максимального гарантированного результата можно формально записать как задачу выбора стратегии s_i^r , обеспечивающей максимум гарантированного результата, который равен

$$\min_{\{s_j, j \neq i\}} \left[\lambda(s) x_i(s) - \frac{1}{2r_i} x_i^2(s) \right], \quad (11.4)$$

где $\lambda(s)$, $x_i(s)$ — решение соответствующей задачи согласованного планирования.

Стратегию s_i^r будем называть гарантирующей, а совокупность $s^r = \{s_i^r\}$ — гарантирующей ситуацией. Проведем исследование гарантирующих стратегий для закона ОУ ($\epsilon = 1$). Во-первых, заметим, что наименее благоприятными условиями для i -го предприятия являются сообщения всеми другими предприятиями максимальных оценок $s_j = D$. Действительно, целевая функция i -го предприятия при законе ОУ имеет вид

$$\lambda^2 s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i} \right) = \frac{R^2 s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i} \right)}{\left(\sum_j s_j \right)^2}$$

и является убывающей функцией s_j , $j \neq i$. Поэтому гарантированный результат равен

$$\frac{s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i} \right)}{[(n-1)D + s_i]^2} R^2$$

и максимален при

$$s_i^r = r_i \frac{(n-1)D}{(n-1)D + r_i}.$$

Легко видеть, что при достаточно большом числе предприятий $s_i^r \approx r_i$. Таким образом, сообщение оценок, близких к достоверным, является не только равновесной, но и гарантирующей ситуацией. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Возможные значения цены $\lambda(s)$ для закона ОУ заключены в пределах $R/nD \leq \lambda \leq R/nd$. Из них наименее благоприятной для предприятия является, очевидно, минимальная цена $\lambda^r = R/nD$ (будем называть ее гарантирующей ценой). Независимо от сообщаемой

оценки предприятие i может ожидать (в худшем случае) цену

$$\lambda = \frac{R}{(n-1)D + s_i} \geq \frac{R}{nD} = \lambda^r \approx \lambda$$

при достаточно большом числе предприятий. Таким образом, при достаточно большом числе предприятий предприятие i может ожидать назначения на этапе планирования цены, близкой к гарантирующей. Определим *гипотезу слабого влияния* $(CB)_2$ как гипотезу поведения предприятий при определении гарантирующих стратегий: предприятие не учитывает влияния сообщаемой оценки на цену λ в том смысле, что при любой оценке s_i ожидает назначения на этапе планирования наименее благоприятной цены λ^r . Стратегии, определенные при гипотезе слабого влияния, будем называть *гарантирующими стратегиями при гипотезе слабого влияния* или просто *гарантирующими стратегиями*, если известно, что гипотеза слабого влияния имеет место. Гипотеза $(CB)_2$ при определении гарантирующих стратегий и гипотеза $(CB)_1$ при определении ситуаций равновесия имеют общие черты. И в том, и другом случае предприятие не учитывает влияния сообщаемой информации на цену продукции. Различие состоит в том, что при определении ситуаций равновесия гипотеза $(CB)_1$ позволяет рассматривать цену λ , как параметр, не зависящий от s_i . При определении же гарантирующих стратегий i -го предприятия гипотеза $(CB)_2$ позволяет вместо определения наихудших оценок $s_j (j \neq i)$ определять гарантирующую цену λ^r , что существенно облегчает анализ. Действительно, при гипотезе $(CB)_2$ гарантированный результат (11.4) можно представить для закона ОУ в виде

$$\min_{\lambda \in L} \lambda^2 s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i}\right) = (\lambda^r)^2 s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i}\right), \quad (11.5)$$

где L — заданное множество возможных значений цены $L = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Максимум гарантированного результата достигается при $s_i^r = r_i$.

Рассмотрим законы ε -согласованного управления при условии, что гипотеза $(CB)_2$ имеет место. В данном случае множество $A_i(\lambda, s_i)$ содержит много планов и заранее неизвестно какой из них будет назначен. Осторожная линия поведения заключается в ориентации на самый неблагоприятный план. С учетом сказанного, гарантированный результат i -го предприятия будет определяться выражением

$$\varphi_i^r(s_i) = \min_{\lambda \in L} \min_{y \in A_i(\lambda, s_i)} \left[\lambda y - \frac{1}{2r_i} y^2 \right], \quad (11.6)$$

где $A_i(\lambda, s_i)$ определяется неравенством (11.3).

Из рис. 1.6 легко видеть, что если $s_i \geq r_i$, то минимум целевой функции на множестве $A_i(\lambda, s_i)$ достигается при $y_i = \lambda s_i (1 +$

$+\sqrt{1-\varepsilon}$, а если $s_i \leq r_i$, то при $y_2 = \lambda s_i (1 - \sqrt{1-\varepsilon})$. Имеем, если $s_i > r_i$

$$\begin{aligned} \varphi_i^r(s_i) &= \lambda_{\min}^2 \left[s_i (1 + \sqrt{1-\varepsilon}) - \frac{1}{2r_i} s_i^2 (1 + \sqrt{1-\varepsilon})^2 \right] = \\ &= \lambda_{\min}^2 (1 + \sqrt{1-\varepsilon}) s_i \left[1 - \frac{s_i (1 + \sqrt{1-\varepsilon})}{2r_i} \right], \end{aligned}$$

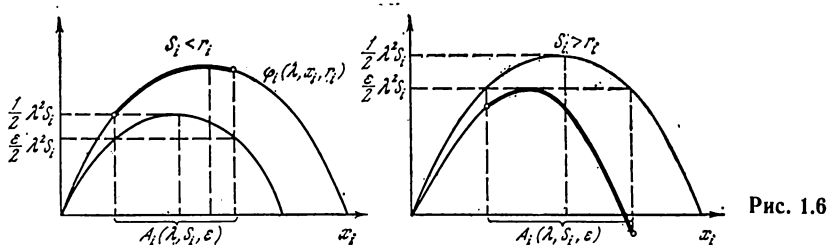
$\frac{d\varphi_i^r}{ds_i} = \lambda_{\min}^2 (1 + \sqrt{1-\varepsilon}) \left(1 - \frac{s_i (1 + \sqrt{1-\varepsilon})}{r_i} \right) < 0$. Следовательно,

$\varphi_i^r(s_i)$ убывающая функция s_i . Если $s_i < r_i$, то

$$\varphi_i^r(s_i) = \lambda_{\min}^2 (1 - \sqrt{1-\varepsilon}) s_i \left(1 - \frac{s_i (1 - \sqrt{1-\varepsilon})}{2r_i} \right),$$

$$\frac{d\varphi_i^r}{ds_i} = \lambda_{\min}^2 (1 - \sqrt{1-\varepsilon}) \left(1 - \frac{s_i (1 - \sqrt{1-\varepsilon})}{r_i} \right) > 0.$$

Следовательно, $\varphi_i^r(s_i)$ — возрастающая функция s_i . Наконец, если $s_i = r_i$, то $\varphi_i^r(r_i) = \varepsilon \lambda_{\min}^2 r_i / 2$ и достигает максимальной величины. Следовательно, $s_i^r = r_i$ для любого $0 < \varepsilon \leq 1$! Вывод на первый взгляд довольно неожиданный. Дело в том, что с уменьшением



ε , центр все в меньшей степени учитывает интересы предприятий. Так, при $\varepsilon \sim 0$ центр гарантирует предприятиям только положительность прибыли (рентабельность производства), конечно, при сообщении достоверных сведений. Оказывается этого достаточно, чтобы гарантирующей стратегией предприятий была стратегия r_i . В принципе можно в условиях согласования положить $\varepsilon \leq 0$, что еще больше расширяет множество согласованных планов, а значит, и возможности оптимизации центра. Однако в этом случае гарантирующей будет любая стратегия на отрезке $\left[0, 2r_i \frac{1 - \sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon} \right]$, причем при $\varepsilon < 0$ $2r_i \frac{1 - \sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon} < r_i$, и, следовательно, сообщение достоверных оценок уже не является гарантирующей стратегией.

У п р а ж н е н и е 11.1. Докажите, что при $\varepsilon \leq 0$ любая стратегия $s_i \in [0, 2r_i(1 - \sqrt{1 - \varepsilon})/\varepsilon]$ является гарантирующей. Чему равен максимальный гарантированный результат?

Рассмотрим теперь случай сильных штрафов с позиций принципа гарантированного результата. Для законов ε -согласованного управления при гипотезе слабого влияния

$$\varphi_i^r(s_i) = \min_{\lambda \in L} \min_{y \in A_i(\lambda, s_i)} \left[\lambda y - \frac{1}{2s_i} y^2 \right] = \frac{\varepsilon}{2} \lambda_{\min}^2 s_i.$$

Таким образом, и в этом случае единственная гарантирующая стратегия $s_i^r = r_i$.

§ 12. Стимулирование и соревнование

В заключение главы рассмотрим несколько иную постановку задачи производства продукции. Примем, что цель центра — максимизировать суммарный выпуск продукции. Планирование происходит на основе встречного способа формирования данных, причем предприятия сообщают непосредственно планы x_i выпуска продукции сверх основного задания (встречные планы), которые и утверждаются центром. Как и ранее, предполагаем, что эти планы будут выполнены. В распоряжении центра имеется фонд материального поощрения M , который он распределяет между предприятиями в зависимости от показателей их работы $\{x_i\}$. Мы рассмотрим два механизма распределения фонда — стимулирование и соревнование. Механизм стимулирования заключается в распределении фонда прямо пропорционально x_i , т. е. часть фонда $\Phi_i(x)$, получаемая предприятием i , равна

$$\Phi_i(x) = \frac{x_i}{X} M, \text{ где } X = \sum_i x_i. \quad (12.1)$$

Механизм соревнования заключается в определении места, занятого предприятием в соревновании и премировании в зависимости от занятого места. Целевая функция предприятия равна

$$f_i = \Phi_i(x) - Z_i(x_i), \quad (12.2)$$

где $Z_i(x_i)$ — затраты на выпуск продукции x_i .

Проведем сначала сравнение стимулирования и соревнования для случая линейных функций затрат.

Анализ механизма стимулирования. Пусть $Z_i(x_i) = k_i x_i$ ($k_i > 0$). Целевая функция предприятия

$$f_i = \frac{x_i}{X} M - k_i x_i. \quad (12.3)$$

Определим ситуацию равновесия (в смысле Нэша), предполагая

$k_i \leq \frac{K}{n-1}$, где $K = \sum_i k_i$. Имеем после несложных вычислений

$$x_i^* = X^* \left(1 - k_i \frac{(n-1)}{K} \right), \quad X^* = \frac{M(n-1)}{K}. \quad (12.4)$$

У п р а ж н е н и е 12.1. Определите ситуацию равновесия для случая произвольных k_i .

Таким образом, для рассматриваемого случая механизм стимулирования обеспечивает выпуск продукции $X_{\text{ст}}^* = \frac{M(n-1)}{K}$.

Анализ механизма соревнования. Место, занятое предприятием в соревновании, определяется в зависимости от принятого им плана x_i . Пусть x_i упорядочены по убыванию ($x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$). Тогда номер предприятия соответствует занятому им месту (для определенности считаем, что при $x_i = x_{i+1}$ лучшее место занимает предприятие с меньшим номером). Целевая функция предприятия

$$f_i = c_i - k_i x_i,$$

где c_i премия за i -е место. (Предполагаем, что $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n = 0$, $\sum_i c_i = M$.) Сложность исследования механизма сорев-

нования в том, что равновесия Нэша в данном случае не существует. Необходимо определить решение игры, исходя из разумных гипотез о поведении предприятий. Примем $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$. В этом случае предприятие с меньшим номером находится в лучших условиях и, естественно, в устойчивой ситуации будет занимать лучшее место. Приняв такое предположение о распределении мест, найдем устойчивые в некотором смысле планы x_i^* . Очевидно, $x_n^* = 0$. Если $x_{n-1}^* < c_{n-1}/k_n$, то предприятию n выгодно, приняв план $x_{n-1}^* < x_n < c_{n-1}/k_n$, занять место $n-1$ и увеличить свой выигрыш ($c_{n-1} - k_n x_n > 0$). Поэтому для устойчивого удержания $(n-1)$ места предприятие $(n-1)$ должно принять план $x_{n-1}^* = c_{n-1}/k_n$. Его выигрыш при этом

$$f_{n-1}^* = c_{n-1} - k_{n-1} x_{n-1}^* = c_{n-1} \left(1 - \frac{k_{n-1}}{k_n} \right) \geq 0.$$

Аналогично для удержания места $(n-2)$ предприятие $(n-2)$ должно принять план не менее

$$x_{n-2}^* = \frac{1}{k_n} c_{n-1} + \frac{1}{k_{n-1}} (c_{n-2} - c_{n-1})$$

(если $x_{n-2} < x_{n-2}^*$, то предприятие $(n-1)$, приняв план $x_{n-2} < x_{n-1} < x_{n-2}^*$, займет место $(n-2)$ и увеличит свой выигрыш).

Продолжая таким образом, получим

$$x_i^* = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_j}{k_j}, \quad i=1 \div n-1, \quad x_n^* = 0, \quad (12.5)$$

где $\Delta_j = c_{j-1} - c_j$ ($j \geq 2$).

Ситуация x^* является устойчивой в следующем смысле. Любому предприятию i невыгодно занимать более высокое место (т. е. с меньшим номером), если остальные предприятия не меняют своих планов. С другой стороны, принимая план меньше x_i^* , предприятие рискует потерять место i получить меньший выигрыш.

Упражнение 12.1. Покажите, что x^* единственная ситуация, устойчивая в вышеуказанном смысле, если все k_i различны.

Принимая ситуацию равновесия x^* за решение игры, оценим суммарный выпуск продукции

$$X^*(k, \Delta) = \sum_i x_i^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{\Delta_j}{k_j} = \sum_{i=1}^n (i-1) \frac{\Delta_i}{k_i}. \quad (12.6)$$

Эта величина зависит от k_i , неизвестных центру. Для сравнения с механизмом стимулирования оценим гарантированное значение

$$\min_{\{k_i\}} \sum_{i=2}^n (i-1) \frac{\Delta_i}{k_i} \quad (12.7)$$

при условии $\sum_{i=1}^n k_i = K$, $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$. Проверьте самостоятельно, что если $(i-1)\Delta_i \leq i\Delta_{i+1}$ ($i=2 \div n-1$), то минимум достигается при

$$k_i = \frac{\sqrt{(i-1)\Delta_i}}{\sum_j \sqrt{(j-1)\Delta_j}} (K - k_1), \quad i \neq 1 \quad (12.8)$$

и равен

$$X^*(\Delta) = \left(\sum_{i=2}^n \sqrt{(i-1)\Delta_i} \right)^2 / (K - k_1). \quad (12.9)$$

Поставим задачу определить распределение премий $\{c_i\}$ и, следовательно, $\{\Delta_i\}$, при котором $X^*(\Delta)$ максимально.

Из условия $\sum_i c_i = M$ получаем $\sum_i (i-1)\Delta_i = M$. Максимум (12.9) при этом условии достигается, если $(i-1)\Delta_i = M/n-1$, ($i \geq 2$), и равен

$$X_{\text{сop}}^* = \frac{(n-1)M}{K - k_1} \geq \frac{M(n-1)}{K}. \quad (12.10)$$

Сравнивая (12.10) с (12.4) видим, что механизм соревнования эффективнее механизма стимулирования (при правильном выборе распределения премий).

З а м е ч а н и е 1. Оценка (12.10) достигается не только при распределении премий $(i-1)\Delta_i = M/(n-1)$, а при любом, удовлетворяющем условиям

$$(i-1)\Delta_i \geq i\Delta_{i+1}, \quad i=2 \div n-1. \quad (12.11)$$

Действительно, в этом случае (12.7) достигается при $k_i = \frac{K-k_1}{n-1}$ и равен (12.10).

З а м е ч а н и е 2. Анализ выражения (12.6) показывает, что для любых k_i оптимальное распределение премий $\Delta_2 = M$, $\Delta_i = 0$ ($i=3 \div n$) или $c_1 = M$, $c_i = 0$ ($i=2 \div n$), что обеспечивает выпуск в ситуации равновесия M/k_2 . Однако такое распределение премий нецелесообразно, так как теряется массовость соревнования.

Из ограничений (12.11) легко получить условия, определяющие оптимальные распределения премий

$$c_{i-1} \geq \frac{2i-1}{i-1} c_i - \frac{i}{i-1} c_{i+1}, \quad i=2 \div (n-1). \quad (12.12)$$

Так, рассматривая (12.12) как равенства, получаем

$$c_i = \frac{M}{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{j}, \quad i=1 \div n-1, \quad c_n = 0.$$

Пусть $3_i(x_i) = k_i 3(x_i)$, ($k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$), где $3(x_i)$ — выпуклая вниз функция ($3(0) = 0$). Обозначая $z_i = 3(x_i)$ и повторяя предыдущие выводы, получим, что в ситуации равновесия

$$z_i^* = \sum_{j=i}^n \frac{\Delta_j}{k_j}, \quad i=1 \div (n-1), \quad z_n^* = 0.$$

Обозначив $\xi(z)$ функцию, обратную $3(x)$, определим выпуск в ситуации равновесия

$$X^*(k, \Delta) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi(z_i^*) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi\left(\sum_{j=i+1}^n \frac{\Delta_j}{k_j}\right).$$

Оценим гарантированное значение выпуска, считая $k_i \leq q$:

$$X^*(\Delta) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi\left(\frac{1}{q} \sum_{j=i+1}^n \Delta_j\right). \quad (12.13)$$

Поставим задачу определить распределение премий, максимизирующее (12.13). Обозначив $\sum_{i=1}^n \Delta_j = u_i$ ($i=1 \div n-1$),

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \Delta_j = \sum_{j=2}^n (j-1) \Delta_j = M, \quad (12.14)$$

получим задачу максимизации $\sum_i \xi\left(\frac{1}{q}u_i\right)$ при условии (12.14) и $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_{n-1}$. Так как ξ — выпуклая вверх функция, то оптимальное решение $u_i = \frac{M}{n-1}$. Отсюда получаем оптимальное распределение премий $\Delta_i = 0$ ($i = 2 \div n-1$), $\Delta_n = \frac{M}{n-1}$,

$$c_i = \frac{M}{n-1}, \quad i = 1 \div n-1. \quad c_n = 0.$$

Гарантированный выпуск при этом

$$X^* = (n-1) \xi\left(\frac{M}{q(n-1)}\right).$$

Если $3(x)$ — выпуклая вверх функция, то ξ — выпуклая вниз, и, следовательно, оптимальное решение $u_1 = M$, $u_i = 0$, $i = 2 \div n-1$. Оптимальное распределение премий $c_1 = M$, $c_i = 0$, $i = 2 \div n$, а гарантированный выпуск продукции $\xi\left(\frac{1}{q}M\right)$.

Пример 1. Сравним механизмы соревнования и стимулирования для случая $3(x) = x^\alpha$, ($\alpha > 1$). Имеем для механизма соревнования

$$X_{\text{сор}}^* = (n-1) \left(\frac{M}{q(n-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

а для механизма стимулирования

$$X_{\text{ст}}^* = n \left(\frac{(n-1)M}{n^2 \alpha q}\right)^{1/\alpha}, \quad \frac{X_{\text{сор}}^*}{X_{\text{ст}}^*} = \frac{n-1}{n} \left(\frac{n^2 \alpha}{(n-1)^2}\right)^{1/\alpha}.$$

Максимум этого отношения при больших n достигается при $\alpha \approx e \approx 2,7$. Заметим, что при малых n и больших α механизм стимулирования может быть эффективнее, чем соревнование.

Глава II

ЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ И ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ

§ 1. Степень централизации

Для рассматриваемой нами задачи производства продукции функционирование активной системы полностью определяется заданием способа формирования данных, системы стимулирования (целевых функций элементов) и процедур планирования и ценообразования (закона управления). Совокупность этих трех составляющих будем называть механизмом функционирования системы. В этой главе рассматривается важная характеристика механизма функционирования (точнее, одной из его составляющих — системы стимулирования) — степень централизации. Повышение ответственности предприятий за выполнение планируемых показателей естественно связать с повышением степени централизации управления. Например, в задаче производства продукции отсутствие санкций за отклонение реальных затрат от планируемых, по существу, соответствует децентрализации планирования затрат. Наоборот, сильные штрафы соответствуют крайней степени централизации планирования затрат, так как в этом случае реальные затраты совпадают с планируемыми. Промежуточные случаи соответствуют частичной централизации (децентрализации) планирования затрат. Пусть, например,

$$f_i(\lambda, x_i, z_i, w_i) = \lambda x_i - z_i - \beta |w_i - z_i|. \quad (1.1)$$

Случай $\beta=0$ соответствует полной децентрализации планирования затрат, а случай $\beta=\infty$ — полной централизации.

Можно пойти дальше по пути децентрализации планирования, позволив предприятиям выпускать продукцию в количестве $y_i \neq x_i$ (либо перевыполнять, либо недовыполнять план). Запишем целевую функцию предприятия, с учетом штрафов за отклонение количества выпускаемой продукции от планируемого, в виде

$$f_i(\lambda, x_i, y_i, z_i, w_i) = \lambda y_i - z_i - \alpha |x_i - y_i| - \beta |w_i - z_i|. \quad (1.2)$$

Полная децентрализация планирования соответствует случаю $\alpha=\beta=0$. При этом

$$f_i(\lambda, x_i, y_i, z_i, w_i) = f_i(\lambda, y_i, z_i) = \lambda y_i - z_i. \quad (1.3)$$

Наконец, можно ввести и децентрализацию управления, позволив предприятиям самим устанавливать цену продукции со

штрафами при отклонении этой цены от установленной центром. Обозначив μ_i цену продукции, установленную предприятием i , запишем целевую функцию предприятия для этого случая:

$$f_i(\lambda, \mu_i, x_i, y_i, z_i, w_i) = \mu_i y_i - z_i - \gamma(\lambda - \mu_i)^2 - \alpha |x_i - y_i| - \beta |z_i - w_i|, \\ \alpha, \beta, \gamma \geq 0. \quad (1.4)$$

Полная децентрализация управления имеет место при $\alpha=\beta=\gamma=0$.

При этом

$$f_i(\mu_i, y_i, z_i) = \mu_i y_i - z_i, \quad (1.5)$$

т. е. все параметры (и цена, и выпуск продукции, и затраты) выбираются предприятием самостоятельно. Будем называть случай полной децентрализации управления рыночной системой.

Совокупность $f = \{f_i\}$ целевых функций предприятий назовем системой стимулирования. Рассмотрим две системы f^1 и f^2 вида

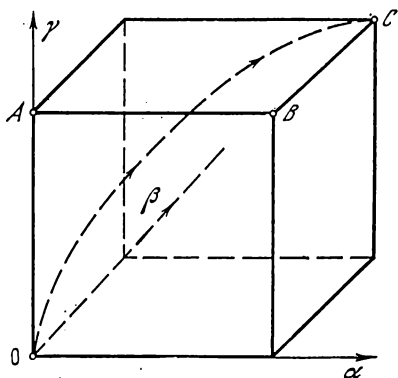


Рис. 2.1

(1.4) и пусть $(\gamma_1, \alpha, \beta_1) \leq (\gamma_2, \alpha_2, \beta_2)$. В этом случае будем говорить, что система f^2 имеет большую степень централизации, чем f^1 и обозначать $f^2 > f^1$. Если $f^2 > f^1$ и $f^1 > f^2$, то системы имеют одинаковую степень централизации. Наконец, если $f^1 \not\geq f^2$ и $f^2 \not\geq f^1$, то системы несравнимы по степени централизации. Аналогично можно сравнивать по степени централизации механизмы функционирования (или активные системы в целом) в зависимости от степени централизации соответствующих систем стимулирования. Различные системы стимулирования вида (1.4) можно изобразить геометрически (рис. 2.1) (т. С соответствует бесконечно удаленной точке), Точка О соответствует рыночной системе, т. А — системе с полной децентрализацией планирования, а т. С — системе с полной централизацией управления. Системы,

рассмотренные в главе 1, располагаются на [BC]. Любая «монотонная» кривая, соединяющая m . О с m . С определяет некоторое множество систем, упорядоченных по степени централизации.

§ 2. Анализ рыночной системы

В условиях рыночной системы не исключено, что $\sum_i y_i < R$, или $\sum_i y_i > R$. В первом случае центр ничего не может поделаться, поскольку он никак не влияет на выпуск продукции. Во втором случае он может не принимать избыток продукции. Например, роль центра могут играть потребители, которые в первую очередь будут брать продукцию, предлагаемую по минимальной цене. Примем для определенности, что $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$. Пусть предприятие k такое, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i r_i < R \leq \sum_{i=1}^k \mu_i r_i.$$

Тогда последние $n-k$ предприятий вынуждены снижать цену, а первые $k-1$ будут повышать цены (при этом их прибыль будет расти). Отсюда следует, что в равновесии установится единая рыночная цена продукции, т. е. $\mu_i = \lambda^*$. Пусть $y_i^* < R$ выпуск i -го предприятия при цене λ^* (очевидно, $y_i^* \leq \lambda^* r_i$). Если $y_i^* < \lambda^* r_i$, то, установив цену $\mu_i = \lambda^* - \varepsilon$ (ε — малое положительное число), предприятие i сможет реализовать продукцию в количестве $\min(R, \lambda^* r_i)$ и получить дополнительную прибыль. Поэтому в равновесии $y_i^* = \lambda^* r_i$ и из условия $\sum_{i=1}^n y_i^* = R$ находим

$$\lambda^* = \frac{R}{H} = \tilde{\lambda}, \quad y_i^* = \lambda^* r_i = \frac{r_i}{H} R = \tilde{x}_i. \quad (2.1)$$

Заметим, что ситуация (λ^*, y^*) не является равновесием Нэша, поскольку любое предприятие может, установив цену $\mu_i > \lambda^*$ при сохранении выпуска $\lambda^* r_i$, увеличить свою прибыль. Однако при этом остальные предприятия могут увеличить выпуск продукции, установив цены $\lambda^* < \mu_j < \mu_i$, что может привести к тому, что продукция предприятия i не найдет сбыта. Поэтому при достаточно большом числе предприятий повышение цены сверх λ^* нецелесообразно. В этом смысле ситуация (λ^*, y^*) является равновесной. Таким образом, в равновесии выпуски продукции являются оптимальными. Учтем влияние отдельной фирмы на рыночную цену. Пусть фирма i установила цену $\lambda > \lambda^*$. Тогда остальные фирмы, устанавливая цены $\lambda - \varepsilon$ (ε — малое положи-

тельное число), смогут реализовать продукцию в количествах $(\lambda - \varepsilon)r_j \approx \lambda r_j$, $j \neq i$, а фирма i только $R - \sum_{j \neq i} \lambda r_j = R - \lambda H_i$, получая прибыль

$$\lambda(R - \lambda H_i) - \frac{1}{2r_i}(R - \lambda H_i)^2.$$

Определяя максимум прибыли по λ , получим

$$\lambda' = \frac{R}{H_i} \frac{1 + \frac{H_i}{r_i}}{2 + \frac{H_i}{r_i}} > \frac{R}{H} = \tilde{\lambda}.$$

В случае фирмы-монополиста ($r_i \gg H_i$) устанавливается монопольная цена

$$\lambda_m \approx R/2H_i, \quad y_i^* \approx R - \lambda_m H_i \approx R/2, \quad (2.2)$$

что совпадает с выводами, полученными при анализе случая предприятия-монополиста в главе I § 3.

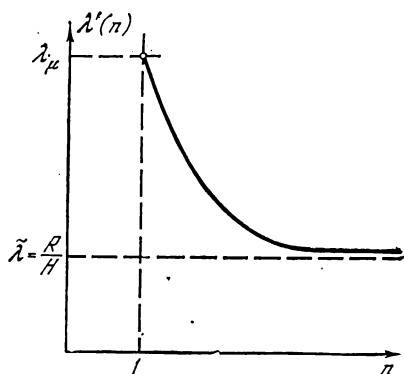


Рис. 2.2

В предыдущем анализе мы не учли, что спрос на продукцию падает при увеличении цены λ . Пусть, например, спрос — линейная функция цены $R(\lambda) = R_m - \alpha\lambda$, где $R_m = R\left(1 + \frac{\alpha}{H}\right)$, что обеспечивает $R(\lambda) = R$ при $\lambda = \tilde{\lambda} = R/H$. Найдём цену λ' из условия максимума $\lambda[R(\lambda) - \lambda H_i] - \frac{1}{2r_i}[R(\lambda) - \lambda H_i]^2$.

Дифференцируя, получаем

$$R(\lambda) - 2\lambda H_i - \alpha\lambda + \frac{1}{r_i}[R(\lambda) - \lambda H_i](\alpha + H_i).$$

Несложные вычисления приводят к следующему выражению для

цены:

$$\lambda' = R_m \frac{\left(1 + \frac{\alpha + H_i}{r_i}\right)}{(\alpha + H_i) \left(2 + \frac{\alpha + H_i}{r_i}\right)} = \frac{R_m (\alpha + H)}{(\alpha + H_i) (\alpha + H + r_i)}.$$

Примем, что коэффициенты эффективности всех предприятий равны между собой $r_i = r = H/n$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda'(n) &= \frac{R_m (\alpha + H)}{\left[\alpha + \frac{(n-1)H}{n}\right] \left[\alpha + H + \frac{H}{n}\right]} = \frac{R_m \cdot n^2 (\alpha + H)}{[\alpha n + (n-1)H][\alpha n + (n+1)H]} = \\ &= \frac{R_m \cdot n^2 (\alpha + H)}{n^2 (\alpha + H)^2 - H^2}. \end{aligned}$$

График зависимости $\lambda'(n)$ приведен на рис. 2.2. Цену $\lambda'(1)$ в случае одного предприятия назовем монопольной λ_m

$$\lambda_m = \frac{R_m (\alpha + H)}{\alpha (\alpha + 2H)} = \frac{R (\alpha + H)^2}{\alpha H (\alpha + 2H)}. \quad (2.3)$$

§ 3. Полная децентрализация планирования

В механизмах децентрализованного планирования предприятия уже не имеют права самостоятельно устанавливать цену продукции, но имеют право выпускать ее в любом количестве. Для упрощения примем, что центр принимает от предприятий всю произведенную продукцию, однако при отклонении общего количества от R в системе возникают потери, с учетом которых целевая функция центра

$$\Psi(y, r) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2r_i} y_i^2 + M \left| \sum_{i=1}^n y_i - R \right|, \quad (3.1)$$

где $M > 0$ достаточно большое число.

Как правило, цена в системах с полной децентрализацией планирования определяется на основе адаптивного способа формирования данных. Простейшим является «управление по отклонению». Если в периоде k суммарный выпуск продукции

$\sum_{i=1}^n y_{ik} < R$, то цена в следующем периоде увеличивается, а если

$\sum_{i=1}^n y_{ik} > R$, то уменьшается. Пусть, например,

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha \left(R - \sum_{i=1}^n y_{ik} \right) = \lambda_k + \alpha \Delta_k, \quad \alpha > 0,$$

где $\Delta_k = R - \sum_{i=1}^n y_{ik}$ — дефицит продукции в периоде k (отрицательный дефицит соответствует избытку продукции). Равновесие при гипотезе слабого влияния определяется, очевидно, соотношениями

$$\sum_i y_i^* = R, \quad y^* = \lambda^* r$$

или

$$y_i^* = \frac{r_i}{H} R = \tilde{x}_i, \quad \lambda^* = \frac{R}{H} = \tilde{\lambda}.$$

Пусть λ_0 цена в периоде $k=0$. Исследуем вопрос о сходимости последовательности цен $\{\lambda_k\}$ к равновесию $\tilde{\lambda}$, считая, что в периоде k предприятие i выпускает продукцию в количестве $\lambda_k r_i$

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \alpha (R - \lambda_k H) = \lambda_k (1 - \alpha H) + \alpha R = \\ &= \alpha R \frac{1 - \beta^{k+1}}{1 - \beta} + \beta^{k+1} \lambda_0, \quad \beta = 1 - \alpha H. \end{aligned}$$

Если $|\beta| < 1$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \frac{\alpha R}{1 - \beta} = \frac{R}{H} = \tilde{\lambda}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{ik} = \tilde{\lambda} r_i$.

Таким образом, последовательности $\{y_{ik}\}$ сходятся к оптимальным выпускам $\{\tilde{x}_i\}$, и соответственно последовательность цен $\{\lambda_k\}$ сходится к цене $\tilde{\lambda}$. Чтобы гарантировать сходимость, достаточно положить $\alpha < 2/nD$.

Упражнение 3.1. Проведите анализ встречного способа формирования данных $\lambda(s) = R/S$ и покажите, что в системе без штрафов $s^* = d$ — единственная ситуация равновесия. Исследуйте случай сильных штрафов.

Ситуация становится существенно сложнее, если предприятие учитывает влияние выпуска y_{ik} на цену λ_{k+1} , т. е. гипотеза слабого влияния не имеет места. Мы договорились использовать в этом случае представление целевой функции предприятия в виде

$$\lambda_0 y_{i0} - \frac{1}{2r_i} y_{i0}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_i^k \left[\lambda_k y_{ik} - \frac{1}{2r_i} y_{ik}^2 \right], \quad (3.2)$$

где $0 < \delta_i < 1$. Для однозначного определения y_{i0} необходимо устранить неопределенность, связанную с будущими значениями $\{y_{ik}\}$. Рассмотрим простейшую гипотезу: предприятие принимает цену λ_0 за равновесную и в соответствии с этим определяет равновесный выпуск y_{i0} . Будем считать пару $\{\lambda_0, y_0\}$ равновесием, если $\sum_i y_{i0} = R$ и последовательность $\{y_{ik} = y_{i0}, k \geq 0\}$ обеспечивает максимум целевой функции (3.2) на множестве всех после-

довательностей вида $\{y_{i0}=y_i, y_{ik}=y_{i0}, k \geq 1\}$. Для таких последовательностей целевая функция (3.2) примет вид

$$\lambda_0 y_i - \frac{1}{2r_i} y_i^2 + N_i \left(\lambda y_{i0} - \frac{1}{2r_i} y_{i0}^2 \right), \quad (3.3)$$

где $N_i = \frac{\delta_i}{1 - \delta_i}$ — степень дальновидности предприятия, $\lambda = \lambda_0 + \alpha \left(R - \sum_{l \neq i} y_{j0} - y_l \right) = \lambda_0 - \alpha (y_i - y_{i0})$. Дифференцируя (3.3) по y_i , получаем

$$\lambda_0 - \frac{y_i}{r_i} - \alpha N_i y_{i0} = 0, \quad y_i = (\lambda_0 - \alpha N_i y_{i0}) r_i.$$

Так как y_{i0} — выпуск в ситуации равновесия, то $y_i = y_{i0}$, и окончательно получаем

$$y_{i0} = \frac{\lambda_0}{\alpha N_i + \frac{1}{r_i}}. \quad (3.4)$$

Таким образом, выпуск y_{i0} однозначно определяется ценой λ_0 в данном периоде.

Рассмотрим последовательность

$$y_{ik} = \frac{\lambda_k}{\alpha N_i + \frac{1}{r_i}}, \quad k \geq 0.$$

Имеем

$$\Delta_k = R - \sum_{i=1}^n y_{ik} = R - \lambda_k \sum_{i=1}^n \left(\alpha N_i + \frac{1}{r_i} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k \left[1 - \alpha \sum_{i=1}^n \left(\alpha N_i + \frac{1}{r_i} \right)^{-1} \right] + \alpha R.$$

Обозначим

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\alpha N_i + \frac{1}{r_i} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k (1 - \alpha Q) + \alpha R.$$

Как было показано выше, если $\alpha Q < 2$, то для любого $\lambda_0 \geq 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \frac{R}{Q} = \lambda^* = \frac{R}{\sum_{i=1}^n \left(\alpha N_i + \frac{1}{r_i} \right)^{-1}} \quad (3.5)$$

и, следовательно,

$$y_i^* = \frac{\lambda^*}{\alpha N_i + \frac{1}{r_i}}. \quad (3.6)$$

Так как Q — убывающая функция N_i и возрастающая функция r_i , то $Q \leq nD$. Следовательно, достаточное условие сходимости $\alpha < 2/nD$ совпадает с условием сходимости при гипотезе слабого влияния.

Проведем анализ ситуации равновесия. Во-первых, $\lambda^* > \tilde{\lambda}$ (предполагаем, что $N_i > 0$, хотя бы для одного предприятия). Во-вторых, выпуски $\{y_i^*\}$ в ситуации равновесия могут быть весьма далекими от оптимальных. Так, например, если для всех i — $\alpha N_i r_i \gg 1$, то $y_i^* \sim 1/N_i$ и вообще не зависит от коэффициентов эффективности r_i . Более того, если $N_i \sim r_i$ (т. е. более эффективное предприятие является и более дальновидным), то $y_i^* \sim 1/r_i$ обратно пропорционально r_i , а не прямо пропорционально, как в оптимальном плане. Интересно провести анализ монопольного эффекта в данном случае. Пусть $\alpha N_i r_i \ll 1$ для $i = 1 \div (n-1)$, а $\alpha N_n r_n \gg 1$, $\alpha N_n H_n \gg 1$. Тогда

$$\lambda^* = \frac{R}{\sum_i \left(\alpha N_i + \frac{1}{r_i} \right)^{-1}} \approx \frac{R}{H_n + \frac{1}{\alpha N_n}} \approx \frac{R}{H_n} \approx \frac{R}{H - r_n}$$

и если $r_n \gg H_n$, то $\lambda^* \gg \tilde{\lambda}$. Заметим, что проявление монопольного эффекта в данном случае тесно связано с дальновидностью предприятия-монополиста. Действительно, если $\alpha N_i r_i \ll 1$ для всех предприятий, то $\lambda^* \approx R/H = \tilde{\lambda}$ независимо от того, имеется в системе монополист или нет. Если $\alpha N_i r_i \gg 1$ для всех предприятий, то

$$\lambda^* \approx \frac{\alpha R}{\sum_i \frac{1}{N_i}} \gg \tilde{\lambda}$$

и также не зависит от наличия в системе предприятия-монополиста. Наконец, если P некоторое множество предприятий, которые являются «очень дальновидными» ($\alpha N_i r_i \gg 1$, $i \in P$), а остальные — недальновидными ($\alpha N_i r_i \ll 1$, $i \notin P$), то

$$\lambda^* \approx \frac{R}{\frac{1}{\alpha N_s} + H - H_s}, \quad N_s = \left(\sum_{i \in P} \frac{1}{N_i} \right)^{-1}, \quad H_s = \sum_{i \in P} r_i.$$

Если при этом $\alpha N_s (H - H_s) \gg 1$, то $\lambda^* \approx \frac{R}{H - H_s}$.

Парадокс дальновидности. Наличие «очень дальновидного» предприятия в системе приводит к интересному парадоксу. Действительно, пусть $\alpha N_n r_n \gg 1$, $\alpha N_n H_n \gg R$, $\alpha N_i r_i \ll 1$, $i = 1 \div (n-1)$. Тогда, как было показано выше,

$$\lambda^* = \frac{R}{H_n}, \quad y_n^* = \frac{\lambda^*}{\alpha N_n + \frac{1}{r_n}} \approx \frac{\lambda^*}{\alpha N_n} \approx 0, \quad y_i^* = \frac{\lambda^*}{\alpha N_i + \frac{1}{r_i}} \approx \lambda^* r_i, \quad i \neq n.$$

Получается парадоксальная ситуация. Дальновидное предприятие фактически не выпускает продукции, и его прибыль равна 0, в то время как недальновидные предприятия получают вполне реальную прибыль $r_i (\lambda^*)^2 / 2$ в каждом периоде функционирования. Этот парадокс показывает, что «отказывать себе сегодня во всем» столь же неразумно, как и «жить только сегодняшним днем».

Можно предложить много других способов установления цены, также основанных на адаптивном способе формирования данных. Пусть, например, центр предполагает, что предприятия действуют в периоде k исходя из гипотезы слабого влияния. Тогда, очевидно, $y_{ik} = \lambda_k r_i$ и центр может определить $s_{i, k+1} = y_{ik} / \lambda_k$,

$$\lambda_{k+1} = \frac{R}{\sum_i s_{i, k+1}} = \frac{R}{\sum_i y_{ik}} \lambda_k. \quad (3.7)$$

Закон ценообразования (3.7) интересен тем, что если предприятия действительно придерживаются гипотезы слабого влияния, то сходимость в ситуацию равновесия $\lambda^* = \tilde{\lambda}$ обеспечивается за один период независимо от начальной цены λ_0 . Проведем анализ ситуации равновесия при учете дальновидности предприятий. Будем по-прежнему считать, что предприятия выбирают величину y_{i0} , предполагая цену λ_0 равновесной. Подставляя в целевую функцию (3.3) закон ценообразования (3.7), получаем

$$\lambda_0 y_i - \frac{1}{2r_i} y_i^2 + N_i \left[\frac{\lambda_0 R}{R + (y_i - y_{i0})} y_{i0} - \frac{1}{2r_i} y_{i0}^2 \right]$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\sum_i y_{i0} = R$). Дифференцируя по y_i , получаем

$$\lambda_0 - \frac{y_i}{r_i} - \frac{\lambda_0 R y_{i0} N_i}{[R + (y_i - y_{i0})]^2}.$$

Наконец, из условия $y_i = y_{i0}$, получаем выпуск y_{i0} предприятия i при цене λ_0

$$y_{i0} = \frac{\lambda_0}{\frac{1}{r_i} + \frac{\lambda_0 N_i}{R}}.$$

Таким образом, цена λ_{k+1} определяется выражением

$$\lambda_{k+1} = R \left(\sum_i \frac{1}{\frac{1}{r_i} + \frac{\lambda_k N_i}{R}} \right)^{-1} = \left(\sum_i \frac{1}{\frac{R}{r_i} + \lambda_k N_i} \right)^{-1}.$$

Сходимость последовательности $\{\lambda_k\}$ в данном случае обеспечивается, если $\sum_i 1/N_i > 1$. Для одинаковых предприятий, т. е. $r_i = r$, $N_i = N$ для всех i , имеем

$$\lambda_{k+1} = \frac{R}{rn} + \lambda_k \frac{N}{n}.$$

Сходимость последовательности $\{\lambda_k\}$ в данном случае обеспечена при $n > N$, т. е. если число предприятий больше степени дальновидности каждого предприятия (заметим, что такое условие достаточно трудно проверить, поскольку степени дальновидности предприятий центру неизвестны).

Равновесная цена

$$\lambda^* = \frac{R}{rn \left(1 - \frac{N}{n}\right)} = \frac{R}{r(n-N)} = \tilde{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{N}{n}} > \tilde{\lambda}.$$

В целом следует признать закон ценообразования (3.7) неудачным, несмотря на его эффективность при гипотезе слабого влияния.

§ 4. Оптимальность систем с полной централизацией управления

Рассмотрим произвольную целевую функцию центра $\Phi(\lambda, x, w, y, z)$ и целевые функции предприятий вида (1.4). Обозначим

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) &= \lambda x_i - \mathcal{Z}_i(x_i, r_i), \\ \Psi(\lambda, x, r) &= \Phi(\lambda, x, \{\mathcal{Z}_i(x_i, r_i)\}, x, \{\mathcal{Z}_i(x_i, r_i)\}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$T(r)$ множество пар (λ^*, x^*) таких, что $\sum_i x_i^* = R$ и

$$\varphi_i(\lambda^*, x_i^*, r_i) = \max_{x_i} \varphi_i(\lambda^*, x_i, r_i), \quad (4.2)$$

$T(\lambda^*, r)$ — множество x^* таких, что $(\lambda^*, x^*) \in T(r)$, $L^*(r)$ — множество λ^* таких, что $T(\lambda^*, r) \neq \emptyset$.

Проведем сравнение систем с различной степенью централизации для этой модели (предполагаем, что решается задача на максимум $\Phi(\lambda, x, w, y, z)$).

Для рыночной системы (т. 0 на рис. 2.1) будем считать, что в равновесии устанавливается единая цена λ^* продукции, а выпуски y_i^* предприятий обеспечивают максимум их целевых функций при этой цене. Тогда $T(r)$ является множеством ситуаций равновесия, и гарантированное значение целевой функции центра равно

$$\Phi_{\text{рын}} = \min_{(y^*, \lambda^*) \in T(r)} \Psi(\lambda^*, y^*, r). \quad (4.3)$$

Для систем с полной децентрализацией планирования (т. А на рис. 2.1) примем в качестве решения игры равновесие при гипотезе (СВ)₁. В этом случае $T(r)$ также является множеством ситуаций равновесия. Однако, поскольку центр устанавливает цену λ , то он может обеспечить гарантированное значение целевой функции

$$\Phi_{\text{рын}} \leq \Phi_{\text{дец}} \leq \max_{\lambda^* \in L^*(r)} \min_{y^* \in T(\lambda^*, r)} \Psi(\lambda^*, y^*, r) \quad (4.4)$$

(верхняя оценка достигается, например, если Ц имеет достоверную информацию).

Рассмотрим систему с частичной централизацией планирования, когда выпуск продукции планируется, и реализация y совпадает с планом x , а затраты z не планируются (т. В на рис. 2.1). В гл. 1 § 7 была доказана оптимальность закона ОУ на множестве G^1 . Напоминаем, что к множеству G^1 принадлежат законы управления, для которых условия равновесия при гипотезе слабого влияния имеют вид (4.2). Заметим теперь, что множество возможных ситуаций равновесия для законов из G^1 совпадает с множеством $T(r)$. Закон ОУ обеспечивает значение целевой функции центра

$$\Phi_{\text{оу}} = \max_{(\lambda^*, x^*) \in T(r)} \Psi(\lambda^*, x^*, r). \quad (4.5)$$

Сравнивая (4.5) с (4.4) и (4.3), легко видеть, что закон ОУ обеспечивает эффективность функционирования системы более высокую, чем любой закон ценообразования в системах с полной децентрализацией планирования и тем более, чем эффективность рыночной системы. Будем увеличивать степень централизации системы. Интуитивно представляется естественным, что если для закона π ситуация равновесия при гипотезе слабого влияния $s^* = r$ (в равновесии сообщается достоверная информация), то при увеличении степени централизации $s^* = r$ будет оставаться по-прежнему ситуацией равновесия. Докажем этот факт строго. Обозначим $G^x(f)$ множество законов управления при системе стимулирования f таких, что для любого $\pi \in G^x(f)$ $s^* = r$ ситуация равновесия и $y^* = x^*$.

Теорема 2.1. Пусть $\pi \in G^x(f^1)$. Если $f^2 \succ f^1$, то $\pi \in G^x(f^2)$.

Доказательство. Пусть $s = (r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, s_i, r_{i+1}, \dots, r_n)$.

Тогда

$$\varphi_i^1(\lambda^*, x_i(s), r_i) \leq \varphi_i^1(\lambda^*, x_i(r), r_i),$$

так как $s^* = r$ ситуация равновесия. Далее, так как $f^2 > f^1$, то

$$\varphi_i^2(\lambda^*, x_i(s), r_i) \leq \varphi_i^1(\lambda^*, x_i(s), r_i).$$

Наконец, замечая, что $\varphi_i^1(\lambda^*, x_i(r), r_i) = \varphi_i^2(\lambda^*, x_i(r), r_i)$, получаем

$$\varphi_i^2(\lambda^*, x_i(s), r_i) \leq \varphi_i^2(\lambda^*, x_i(r), r_i),$$

что и означает, что $s^* = r$ — ситуация равновесия при системе стимулирования f^2 . Теорема доказана.

Таким образом, множество $G^n(f)$ любой системы f является подмножеством множества $G^n(f_{\text{пц}})$ системы с полной централизацией управления (т. е. и ценообразования, и планирования). Рассмотрим множество $G^{\text{пр}}$ законов управления таких, что для любого закона $\pi \in G^{\text{пр}}$ функции $\theta_i(s) = \varphi_i(\lambda, x_i(s), s_i)$ являются строго возрастающими по s_i (прогрессивные законы). В системе с полной централизацией управления, очевидно для любого закона $\pi \in G^{\text{пр}}$, единственная ситуация равновесия $s^* = r$. Следовательно, $G^{\text{пр}} \subset G^n(f_{\text{пц}})$. Заметим также, что закон ОУ принадлежит $G^n(f)$ в любой системе. Покажем, что закон ОУ принадлежит множеству $G^{\text{пр}}$ в системе с полной централизацией управления. Действительно, если $s_i^1 > s_i^2$, то

$$\varphi_i(\lambda, x_i(s^1), s_i^2) < \varphi_i(\lambda, x_i(s^2), s_i^1) \leq \varphi_i(\lambda, x_i(s^1), s_i^1).$$

Строгое неравенство в этой цепочке следует из того, что φ_i — строго убывающая функция затрат $Z_i(x_i, r_i)$, а последние являются строго убывающими функциями коэффициентов эффективности r_i . Второе неравенство в цепочке следует из условий совершенного согласования. Таким образом, гарантированное значение целевой функции в системах с полной централизацией управления $\Phi_{\text{пц}}$ для оптимального прогрессивного закона управления не меньше чем, для закона ОУ, т. е. $\Phi_{\text{пц}} \geq \Phi_{\text{оу}} \geq \Phi_{\text{деп}} \geq \Phi_{\text{рын}}$. Отсюда следуют аналогичные неравенства для критерия эффективности K . Механизм функционирования будем называть прогрессивным, если прогрессивным является закон управления. Содержательный смысл условий строгого возрастания целевых функций $\varphi_i(\lambda, x_i(s), s_i)$ по s_i довольно очевиден. Пусть предприятие i увеличивает эффективность s_i до некоторой величины $s_i' > s_i$. Ясно, что в соответствии с принципом «большая плата за большой труд» целевая функция предприятия должна возрасти. Таким образом, условие строгого возрастания функций φ_i по s_i является естественным и необходимым требованием к любой справедливой системе оплаты. Если рассматривать только прогрессивные механизмы, то полученные выше результаты можно сформулировать следующим

образом: оптимальный механизм функционирования существует на множестве механизмов с полной централизацией управления. На практике, однако, системы с полной централизацией управления могут быть недопустимы по тем или иным соображениям (ограничения на величину штрафов, или ограничения на число планируемых параметров и т. д.). В этом случае возникают сложные задачи определения оптимальных механизмов на множестве систем с частичной централизацией управления. Следует также заметить, что вывод об эффективности систем с полной централизацией управления (ценообразования и планирования) получен при условии, что затраты на управление (сбор данных, решение соответствующих задач принятия решений, осуществление контроля и применение экономических санкций) не учитываются. Ясно, что чем больше степень централизации управления, тем больше и затраты на осуществление этого управления. В рыночных системах затраты на управление минимальны (центр только наблюдает), в системах с полной централизацией управления — максимальны. С учетом затрат на управление оптимальным механизмом функционирования может быть уже некоторый частично централизованный механизм.

Глава III

ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Анализ задачи производства продукции, подробно проведенный в предыдущих главах, показал, что чем больше степень централизации в системе, тем больше эффективность ее функционирования. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только системы централизованного планирования (т. е. системы с полной централизацией управления λ и частичной или полной централизацией планирования). Рассматриваемые в этой главе задачи распределения ресурсов в содержательном смысле отражают самые разные экономические ситуации (распределение капиталовложений, планирование научно-исследовательских работ, реализация сложного проекта, ремонт оборудования и т. д.). Мы постараемся решить задачу определения оптимального механизма функционирования, используя приемы и результаты предыдущих глав, а также нашу интуицию.

§ 1. Распределение сырья

Рассмотрим активную систему, состоящую из центра, в распоряжении которого имеется некоторое количество сырьевого ресурса R , и n активных элементов (предприятий). Обозначим x_i количество ресурса, получаемого предприятием i , z_i — доход, получаемый предприятием при использовании ресурсов x_i (например, объем произведенной продукции в денежном выражении). Задача центра — распределить ресурс R между предприятиями так, чтобы суммарный доход в системе был максимален:

$$\Theta(z) = \sum_{i=1}^n z_i \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = R. \quad (1.2)$$

Примем, что доход от использования ресурсов z_i не превышает некоторой величины $\Theta_i(x_i)$, определяемой техническим уровнем производства

$$z_i \leq \Theta_i(x_i) = 2r_i \sqrt{x_i}. \quad (1.3)$$

Как и в задаче производства продукции, центр не знает коэффициентов эффективности $\{r_i\}$ предприятий, а знает только границы $[d, D]$ их возможных значений.

Для определения оптимального решения выпишем функцию Лагранжа

$$\sum_{i=1}^n 2r_i \sqrt{x_i} - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - R \right). \quad (1.4)$$

Дифференцируя (1.4) по x_i , получаем

$$\tilde{x}_i = \frac{r_i^2}{\tilde{\lambda}^2},$$

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \sum_{i=1}^n r_i^2 = R, \quad \tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{R}}. \quad (1.5)$$

Возьмем в качестве целевых функций предприятий прибыль, получаемую от использования ресурсов

$$f_i(\lambda, x_i, z_i) = z_i - \lambda x_i, \quad (1.6)$$

где λ — цена ресурса.

Рассмотрим закон ОУ при встречном способе формирования данных. Условия совершенного согласования

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (2s_i \sqrt{x_i} - \lambda x_i) = \frac{s_i}{\sqrt{x_i}} - \lambda = 0 \quad (1.7)$$

вместе с ограничением (1.2) однозначно определяют закон ОУ

$$x_i(s) = \frac{s_i^2}{\lambda^2}, \quad \lambda(s) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n s_j^2}{R}}. \quad (1.8)$$

Подставляя в целевую функцию предприятия, получаем

$$f_i[\lambda(s), x_i(s), z_i(s)] = D_i(s) = \frac{s_i(2r_i - s_i)}{\lambda}.$$

Выпишем уравнения для определения точки Нэша

$$\sigma_i^2(r_i - s_i) = \frac{1}{2} s_i^3, \quad \sigma_i^2 = \sum_{j \neq i} s_j^2 = \sum_{j=1}^n s_j^2 - s_i^2. \quad (1.9)$$

Так как $d \leq s_i \leq D$, то при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_i - s_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_i^3}{2\sigma_i^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D^3}{(n-1)d^2} = 0.$$

Таким образом, при достаточно большом числе предприятий сообщаемые оценки $\{s_i^*\}$ будут близки к достоверным $\{r_i\}$, а распределение ресурсов $\{x_i^*\}$ — к оптимальному $\{\tilde{x}_i\}$. Если число предприятий мало, то можно применить приемы, которые мы рассмотрели в главе I (нормирование целевых функций, дифференцированные цены, обобщенные оценки и, наконец, штрафные).

У п р а ж н е н и е 1.1. Покажите, что при нормировании целевых функций (гл. 1 § 3) $s^*=r$ — единственная ситуация равновесия при любом числе предприятий $n \geq 2$.

У п р а ж н е н и е 1.2. Выпишите условия равновесия для закона управления с обобщенными оценками (гл. 1 § 3)

$$x_i^* = \frac{\tau_i^2}{\lambda^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \tau_j^2}{R}}, \quad \tau_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} s_j.$$

При каких условиях на матрицу $Q = \|q_{ij}\|$ план x^* в ситуации равновесия близок к $\tilde{x}$ при любом числе $n \geq 2$ предприятий?

Рассмотрим более подробно случай дифференцированных цен

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{\sigma_i^2 + a_i^2}{R}}, \quad a_i = \frac{z_i}{2\sqrt{x_i}},$$

$$f_i = z_i - \lambda_i x_i = z_i - \sqrt{\frac{\sigma_i^2 + a_i^2}{R}} x_i = 2a_i \sqrt{x_i} - \sqrt{\frac{\sigma_i^2 + a_i^2}{R}} x_i,$$

где $d \leq a_i \leq D$ — реальная эффективность работы предприятия i . Закон ОУ в данном случае совпадает с (1.8), поскольку совпадают функции предпочтения $\eta_i(\lambda, x_i, s_i) = 2s_i\sqrt{x_i} - \lambda x_i$. Учитывая, что $\sigma_i(s)$ не зависит от s_i получаем в ситуации равновесия $s_i^* = a_i$

$$f_i = \frac{2a_i^2}{\lambda} - \frac{a_i^2}{\lambda} = \frac{a_i^2}{\lambda}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n a_j^2}{R}}. \quad (1.10)$$

Покажем, что f_i — строго возрастающая функция a_i

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \frac{\partial f_i}{\partial a_i} = \frac{2a_i \left(\sum_j a_j^2 \right) - a_i^3}{\left(\sum_j a_j^2 \right)^{3/2}} = \frac{2a_i \left(\sum_{j \neq i} a_j^2 \right) + a_i^3}{\left(\sum_j a_j^2 \right)^{3/2}} > 0.$$

Таким образом, $a_i = r_i$ и, следовательно, $s_i^* = r_i$ при любом числе

предприятий $n \geq 1$ и при любых $d \leq r_i \leq D$. В отличие от задачи производства продукции в данном случае монопольные эффекты отсутствуют, поскольку $s^* = a = r$ даже в случае одного предприятия.

Полученный результат справедлив и для случая сильных штрафов. Действительно, в этом случае $s_i = a_i$, и целевая функция предприятия i будет иметь вид (1.10). Строгая монотонность целевых функций предприятий сохраняется при $\lambda'(s) = \gamma \lambda(s)$, $1 < \gamma < 2$, так как

$$f_i = \frac{2a_i^2}{\lambda} - \frac{\gamma a_i^2}{\lambda} = (2 - \gamma) \frac{a_i^2}{\lambda}$$

остается строго возрастающей функцией a_i при $\gamma < 2$.

У п р а ж н е н и е 1.3. Рассмотрите адаптивный способ формирования данных

$$s_{i,k+1} = \frac{z_{ik}}{2 \sqrt{x_{ik}}} = a_{ik}.$$

Определяя решение игры так же, как при анализе адаптивного способа в задаче производства продукции (гл. 1 § 3), покажите, что $s^* = r$ — единственная ситуация равновесия для любого числа предприятий.

Как и для задачи производства продукции, можно рассмотреть более общую задачу с произвольной целевой функцией $\Phi(x, z)$ центра и произвольными функциями дохода $\mathfrak{D}_i(x_i, r_i)$. При определенных условиях для функций $\{\mathfrak{D}_i(x_i, r_i)\}$ и закона управления $\pi(s)$ можно доказать теоремы о слабом влиянии, квазиинвариантности законов согласованного управления, аналогичные теоремам 1.1 и 1.2 гл. 1 § 6. Предполагая гипотезу (СВ)₁, можно получить соответствующие утверждения об инвариантности законов управления и оптимальности законов ОУ (гл. 1 § 5) и т. д. Рассуждения и формальные выкладки почти полностью аналогичны соответствующим выкладкам для задачи производства продукции. Поэтому предоставляем читателям рассмотреть указанные обобщения задачи распределения сырья самостоятельно в качестве упражнений.

§ 2. Управление сложным проектом

Следующая задача распределения ресурсов, которую мы рассмотрим, связана с финансированием сложного проекта. В осуществлении проекта участвуют несколько организаций, каждая из которых отвечает за реализацию определенной части проекта, которую будем называть операцией. Некоторые операции можно начинать только после завершения других. Такие зависимости удобно изображать в виде графа, вершины которого соответствуют отдельным операциям проекта, а дуги

отражают зависимости между ними (вершины i, j соединены дугой (i, j)), если и только если операцию j нельзя начинать, пока не закончена операция i). Такой граф называется сетью или сетевым графиком. Обозначим x_i количество ресурсов, выделенное для выполнения i -й операции (и, следовательно, выделенное организации i). При заданном количестве ресурсов операция i может быть выполнена за время t_i не меньшее определенной величины $\tau_i(x_i)$. Мы примем, что $\tau_i(x_i) = W_i/x_i$, где W_i — объем i -й операции, $t_i \geq W_i/x_i$. Задача заключается в распределении ограниченных средств R таким образом, чтобы проект был реализован за минимальное время. Как и в предыдущих задачах, будем считать, что центр (например, головная организация, ответственная за проект в целом) знает только границы $[d_i, D_i]$ объемов операций, в то время как отдельные исполнители (организации) знают соответствующие объемы точно. Будем анализировать только встречный способ формирования данных. Начнем исследование с простейшего случая, когда проект представляет совокупность независимых операций. Очевидно, в этом случае продолжительность T проекта определяется максимальной продолжительностью операции

$$T = \max_i t_i. \quad (2.1)$$

Определим оптимальное решение задачи

$$\max_i \frac{W_i}{x_i} \xrightarrow{x} \min, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = R. \quad (2.3)$$

Очевидно, в оптимальном решении все операции заканчиваются одновременно, поэтому

$$\frac{W_i}{\tilde{x}_i} = \tilde{T}, \quad \tilde{x}_i = \frac{W_i}{\tilde{T}} = \frac{W_i}{\sum_j W_j} R, \quad (2.4)$$

$$\tilde{T} = \frac{W_9}{R}, \quad W_9 = \sum_{j=1}^n W_j. \quad (2.5)$$

Вид оптимального решения подсказывает нам и форму целевых функций организаций. Действительно, запишем выражение (2.4) в виде

$$T^2 - \frac{W_i^2}{x_i^2} = 0.$$

Заметив, что это условие является необходимым и достаточным условием минимума по x_i функции

$$T^2 x_i + \frac{W_i^2}{x_i},$$

возьмем в качестве целевых функций организаций

$$f_i(\lambda, x_i, t_i) = \lambda^2 x_i + W_i t_i = x_i(\lambda^2 + t_i^2). \quad (2.6)$$

Организация стремится к минимизации этой величины, что в содержательном смысле соответствует стимулированию уменьшения продолжительности t_i операции и снижению затрат x_i на ее выполнение. Рассмотрим теперь закон ОУ

$$x_i = s_i / \lambda, \quad \lambda = S / R, \quad S = \sum_j s_j, \quad (2.7)$$

где $\{s_i\}$ — оценки объемов операций, сообщаемые организациями. Подставляя (2.7) в (2.6) и учитывая, что $t_i = W_i / x_i$, получаем

$$\mathcal{D}_i(s) = \lambda^2(s) x_i(s) + W_i \frac{W_i}{x_i(s)} = \lambda \left(s_i + \frac{W_i^2}{s_i} \right) = \frac{S}{R} \left(s_i + \frac{W_i^2}{s_i} \right). \quad (2.8)$$

Выпишем уравнения для определения точки Нэша

$$\left(\frac{W_i^2}{s_i^2} - 1 \right) \sigma_i = 2s_i, \quad \sigma_i = \sum_{j \neq i} s_j. \quad (2.9)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{W_i^2}{s_i^2} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2s_i}{\sigma_i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2D_i}{\sum_{j \neq i} d_j} = 0.$$

Следовательно, при достаточно большом числе организаций $s_i^* \approx W_i$ и распределение ресурсов в ситуации равновесия близко к оптимальному $\bar{x}$. При малом числе организаций-соисполнителей применяем уже известные нам приемы — нормирование целевых функций, установление дифференцированных по организациям управлений λ_i , введение сильных штрафов и т. д. Предоставляем читателям провести соответствующие исследования самостоятельно.

Пусть проект представляет собой последовательную цепочку операций. Примером может служить разработка новой техники (цикл «исследование — производство»), включающая научные исследования в НИИ, опытную разработку в ОКБ и серийный выпуск на предприятии. В данном случае продолжительность проекта равна сумме продолжительностей операций.

Решая задачу

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{x_i} \xrightarrow{x} \min, \quad \sum_{i=1}^n x_i = R,$$

получаем оптимальное решение

$$\tilde{x}_i = \frac{\sqrt{W_i}}{\sum_j \sqrt{W_j}} R, \quad \tilde{T} = \frac{W_9}{R}, \quad W_9 = \left(\sum_j \sqrt{W_j} \right)^2. \quad (2.10)$$

Обозначая $\lambda = \sqrt{W_9}/R$, запишем (2.10) в виде

$$\lambda^2 - \frac{W_i}{x_i^2} = 0.$$

Замечая, что это условие является необходимым и достаточным условием минимума по x_i функции

$$\lambda^2 x_i + \frac{W_i}{x_i},$$

возьмем в качестве целевых функций организаций

$$f_i(\lambda, x_i, t_i) = \lambda^2 x_i + t_i. \quad (2.11)$$

Такой вид целевых функций стимулирует снижение затрат и времени выполнения операции, как и в случае независимых операций. Однако в отличие от (2.6) множитель W_i перед t_i отсутствует. Закон ОУ для целевых функций (2.11) с учетом $t_i = W_i/x_i$ будет иметь вид

$$x_i = \frac{\sqrt{s_i}}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{\sum_j \sqrt{s_j}}{R}. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в целевую функцию (2.11), получим

$$\mathcal{D}_i(s) = \lambda \left(\sqrt{s_i} + \frac{W_i}{\sqrt{s_i}} \right) = \frac{1}{R} \left(\sum_j \sqrt{s_j} \right) \left(\sqrt{s_i} + \frac{W_i}{\sqrt{s_i}} \right).$$

Система уравнений для определения точки Нэша

$$\left(\frac{W_i}{s_i} - 1 \right) \sigma_i = 2 \sqrt{s_i}, \quad \sigma_i = \sum_{j \neq i} \sqrt{s_j}. \quad (2.13)$$

Условие слабого влияния в данном случае также имеет место, и поэтому при достаточно большом числе организаций $s_i^* \approx W_i$, $x_i^* = x_i(s^*) \approx x_i$. При малом числе организаций действуем аналогично случаю независимых операций. Заметим, что в случае сильных штрафов целевая функция является строго возрастаю-

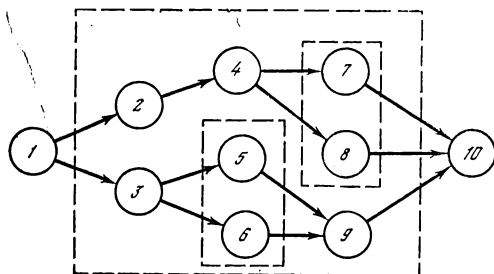


Рис. 3.1.

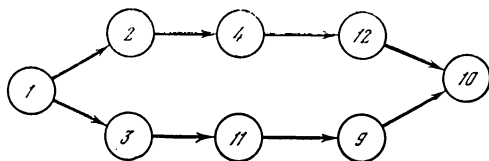


Рис. 3.2

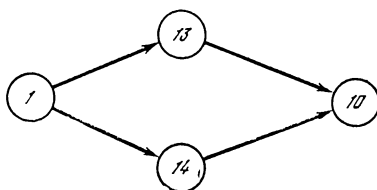


Рис. 3.3

щей по s_i как в случае независимых операций, так и в случае последовательных операций. Это обеспечивает сообщение достоверной информации в ситуации равновесия при любом числе организаций и любых объемах операций.

Итак, для проектов частного вида нам удалось решить задачу построения эффективного механизма функционирования. Перейдем к исследованию более сложных случаев. Пусть сетевой график проекта имеет последовательно-параллельную структуру (рис. 3.1). Такую структуру путем последовательного агрегирования операций можно свести либо к последовательному, либо к параллельному виду, т. е. к проекту с независимыми, либо с последовательными операциями. При этом, если объединяются параллельные (независимые) операции, то объем агрегированной операции равен сумме объемов отдельных операций. Так, для сети рис. 3.1 можно объединить операции 5 и 6, заменив их агрегированной операцией 11 объема $W_{11} = W_5 + W_6$. Аналогично $W_{12} = W_7 + W_8$ (рис. 3.2). Теперь объединяем последовательные операции 2, 4, 12, заменяя их операцией 13 объема $W_{13} = (\sqrt{W_{12}} + \sqrt{W_2} + \sqrt{W_4})^2$. Операции 3, 11, 9 заменяем операцией 14 объема $W_{14} = (\sqrt{W_3} + \sqrt{W_{11}} + \sqrt{W_9})^2$ (рис. 3.3).

Объединяя операции 13 и 14 в одну операцию 15 объема $W_{15} = W_{13} + W_{14}$, получаем проект из последовательных операций 1, 15 и 10 суммарного объема $W_9 = (\sqrt{W_1} + \sqrt{W_{15}} + \sqrt{W_{10}})^2$. Процедуру планирования проводим в обратном порядке. Сначала распределяем ресурс R между последовательными операциями 1, 15 и 10 (при планировании, очевидно, вместо объемов операций W_i подставляем соответствующие оценки s_i):

$$x_1 = \frac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{s_9}} R, \quad x_{15} = \frac{\sqrt{s_{15}}}{\sqrt{s_9}} R, \quad x_{10} = \frac{\sqrt{s_{10}}}{\sqrt{s_9}} R.$$

Далее ресурс x_{15} распределяем между независимыми операциями 13 и 14:

$$x_{13} = \frac{s_{13}}{s_{15}} x_{15}, \quad x_{14} = \frac{s_{14}}{s_{15}} x_{15}.$$

Продолжая процесс дезагрегирования, получаем

$$\begin{aligned} x_2 &= \sqrt{\frac{s_2}{s_{13}}} x_{13}, & x_4 &= \sqrt{\frac{s_4}{s_{13}}} x_{13}, & x_{12} &= \sqrt{\frac{s_{12}}{s_{13}}} x_{13}, \\ x_3 &= \sqrt{\frac{s_3}{s_{14}}} x_{14}, & x_{11} &= \sqrt{\frac{s_{11}}{s_{14}}} x_{14}, & x_9 &= \sqrt{\frac{s_9}{s_{14}}} x_{14}, \\ x_5 &= \frac{s_5}{s_{11}} x_{11}, & x_6 &= \frac{s_6}{s_{11}} x_{11}, & x_7 &= \frac{s_7}{s_{12}} x_{12}, & x_8 &= \frac{s_8}{s_{12}} x_{12}. \end{aligned}$$

Теперь легко выписать закон планирования $x(s)$ в явном виде. Например,

$$\begin{aligned} x_8(s) &= \frac{s_8 (\sqrt{s_2} + \sqrt{s_4} + \sqrt{s_7 + s_8})}{\sqrt{s_7 + s_8} \cdot \sqrt{(\sqrt{s_2} + \sqrt{s_4} + \sqrt{s_7 + s_8})^2 + (\sqrt{s_3} + \sqrt{s_9} + \sqrt{s_5 + s_6})^2}} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_{10}} + \sqrt{(\sqrt{s_2} + \sqrt{s_4} + \sqrt{s_7 + s_8})^2 + (\sqrt{s_3} + \sqrt{s_9} + \sqrt{s_5 + s_6})^2}}. \end{aligned}$$

Как видите, явная запись закона планирования получилась довольно громоздкой. Для того чтобы сообщаемые оценки объемов операций были достоверными, рассмотрим иерархическую процедуру распределения фонда материального поощрения Φ . Сначала фонд распределяем между операциями 1, 10 и агрегированной операцией 15. Поскольку эти операции образуют последовательную цепочку, то целевые функции имеют вид (2.11). В частности, для агрегированной операции 15 $f_{15} = \lambda^2 x_{15} + t_{15}$, $t_{15} \geq W_{15}/x_{15}$. У всех исполнителей части проекта, соответствующей агрегированной операции 15, имеется общая цель — выполнить операцию 15 за минимальное время, в соответствии с которой $t_{15} = W_{15}/x_{15}$. Тогда часть фонда материального поощре-

ния, получаемая исполнителями агрегированной операции 15,

$$\Phi_{15} = \frac{\left(\sqrt{s_{15}} + \frac{W_{15}}{\sqrt{s_{15}}} \right)^{-1}}{\left(\sqrt{s_{15}} + \frac{W_{15}}{\sqrt{s_{15}}} \right)^{-1} + \left(\sqrt{s_1} + \frac{W_1}{\sqrt{s_1}} \right)^{-1} + \left(\sqrt{s_{10}} + \frac{W_{10}}{\sqrt{s_{10}}} \right)^{-1}} \Phi.$$

Максимум Φ_{15} достигается при $s_{15} = W_{15}$. Таким образом, общая цель всех организаций-соисполнителей агрегированной операции 15 сообщить достоверное значение W_{15} . Далее фонд Φ_{15} распределяется между операциями 13 и 14. Так как операции 13 и 14 являются независимыми, то в данном случае берем в качестве целевых функций выражение (2.6). Например, для операции 13 $f_{13} = \lambda^2 x_{13} + W_{13} t_{13}$. Как и в предыдущем случае, общая цель организаций, участвующих в операции 13 — минимизировать ее продолжительность $t_{13} = W_{13}/x_{13}$. Фонд Φ_{13} , получаемый соисполнителями операции 13

$$\Phi_{13} = \frac{\left(s_{13} + \frac{W_{13}^2}{s_{13}} \right)^{-1}}{\left(s_{13} + \frac{W_{13}^2}{s_{13}} \right)^{-1} + \left(s_{14} + \frac{W_{14}^2}{s_{14}} \right)^{-1}} \Phi_{15},$$

максимален при сообщении достоверной оценки объема агрегированной операции 13.

Продолжая процесс деления фонда, мы определим фонд Φ_i для каждой организации. Рассмотрим последний шаг этого процесса. Пусть определен общий фонд Φ_{11} организаций 5 и 6, которые являются соисполнителями агрегированной операции 11. Часть фонда, получаемая например, операцией 5, равна

$$\Phi_5 = \frac{\left(s_5 + \frac{W_5^2}{s_5} \right)^{-1}}{\left(s_5 + \frac{W_5^2}{s_5} \right)^{-1} + \left(s_6 + \frac{W_6^2}{s_6} \right)^{-1}} \Phi_{11}$$

и максимальна при $s_5 = W_5$. Таким образом, максимум фонда Φ_i каждой организации достигается при сообщении ею достоверной оценки объема соответствующей операции. Но при этом оказываются достоверными и все оценки объемов агрегированных операций! Следовательно, единственной равновесной стратегией для всех организаций является сообщение достоверных объемов операций (при этом распределение ресурсов по операциям будет оптимальным).

Рассмотренный пример интересен тем, что, по существу, мы ввели иерархическую структуру управления в системе. Дей-

ствительно, центру достаточно получать оценки объемов операций 1, 10 и агрегированной операции 15 (например, от организации, назначенной головной по части проекта, соответствующей операции 15). На основе полученных оценок он распределяет ресурсы R только между этими операциями. Распределение ресурсов x_{15} производит уже головная организация между организациями, ответственными за операции 13 и 14 и т. д. Иерархическая структура системы показана на рис. 3.4. После завершения проекта центр распределяет фонд Φ также только между головными организациями, ответственными за операции 1, 15 и 10. А эти организации уже сами распределяют фонд между соисполнителями соответствующих частей проекта и т. д.

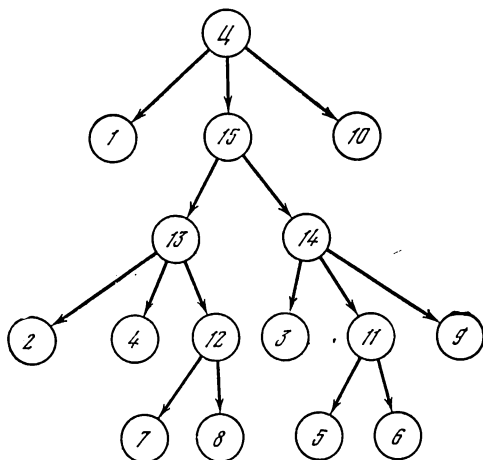


Рис. 3.4

Рассмотрим еще один пример. Пусть операции проекта независимы, и для каждой операции задан директивный срок T_i ее завершения. В этом случае критерием, определяющим качество плана, может служить максимальное отклонение от директивных сроков

$$\max_i (t_i - T_i) \xrightarrow{\mathbf{x}} \min, \quad (2.14)$$

либо максимальное относительное отклонение

$$\max_i \frac{t_i}{T_i} \xrightarrow{\mathbf{x}} \min. \quad (2.15)$$

Рассмотрим, например, критерий (2.14). Решая задачу

$$\max_i \left(\frac{w_i}{x_i} - T_i \right) \xrightarrow{\mathbf{x}} \min, \quad \sum_{i=1}^n x_i = R,$$

получаем оптимальное решение

$$\tilde{x}_i = \frac{W_i}{\lambda + T_i}, \quad (2.16)$$

где λ определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{W_i}{\lambda + T_i} = R.$$

Замечая, что условия (2.16) являются необходимыми и достаточными условиями минимума функций

$$(\lambda + T_i)^2 x_i + \frac{W_i^2}{x_i},$$

возьмем в качестве целевых функций организаций

$$f_i(\lambda, x_i, t_i) = (\lambda + T_i)^2 x_i + W_i t_i. \quad (2.17)$$

В этом случае закон открытого управления

$$x_i(s) = \frac{s_i}{\lambda(s) + T_i}, \quad (2.18)$$

где $\lambda(s)$ определяется как решение уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda + T_i} = R. \quad (2.19)$$

В данном случае нам не удалось выписать закон $\lambda(s)$ в явном виде. Подставляя закон (2.18), (2.19) в целевую функцию (2.17), получим

$$\mathcal{D}_i(s) = [\lambda(s) + T_i] \left(s_i + \frac{W_i^2}{s_i} \right).$$

Система уравнений для определения точки Нэша

$$\left(\frac{W_i^2}{s_i^2} - 1 \right) (\lambda + T_i) = \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} \left(s_i + \frac{W_i^2}{s_i} \right).$$

Для определения $\partial \lambda / \partial s_i$, дифференцируем тождество (2.19)

$$\sum_{j=1}^n \frac{s_j}{(\lambda + T_j)^2} \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} = \frac{1}{\lambda + T_i}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} = \frac{1}{\lambda + T_i} \left[\sum_{j=1}^n \frac{s_j}{(\lambda + T_j)^2} \right]^{-1}. \quad (2.20)$$

Окончательно получаем

$$\left(\frac{W_i^2}{s_i^2} - 1 \right) = \frac{1}{(\lambda + T_i)^2} \left[\sum_{j=1}^n \frac{s_j}{(\lambda + T_j)^2} \right]^{-1} \left(s_i + \frac{W_i^2}{s_i} \right).$$

Докажем, что в данном случае условие слабого влияния также имеет место, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda + T_i)^2} \left[\sum_{j=1}^n \frac{s_j}{(\lambda + T_j)^2} \right]^{-1} = 0.$$

Действительно, пусть $T = \max_i T_i < \infty$. Тогда

$$R = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda + T_i} \geq \frac{nd}{\lambda + T}, \quad \lambda \geq \frac{nd}{R} - T, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{s_j (\lambda + T_i)^2}{(\lambda + T_j)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_j s_j \right) = \infty.$$

Таким образом, при достаточно большом числе организаций $s_i^* \approx W_i$, и распределение ресурсов близко к оптимальному.

При малом числе организаций в ситуации равновесия $s_i^* > W_i$, т. е. существует тенденция к завышению оценок объемов работ (что приводит к уменьшению λ). Поможет ли в этом случае нормирование целевых функций? Ограничимся исследованием случая двух организаций. Пусть Φ — общий фонд материального поощрения. Тогда фонды материального поощрения организаций соответственно равны

$$\Phi_2 = \frac{(\lambda + T_1) \left(s_1 + \frac{W_1^2}{s_1} \right) \Phi}{(\lambda + T_1) \left(s_1 + \frac{W_1^2}{s_1} \right) + (\lambda + T_2) \left(s_2 + \frac{W_2^2}{s_2} \right)},$$

$$\Phi_1 = \frac{(\lambda + T_2) \left(s_2 + \frac{W_2^2}{s_2} \right) \Phi}{(\lambda + T_1) \left(s_1 + \frac{W_1^2}{s_1} \right) + (\lambda + T_2) \left(s_2 + \frac{W_2^2}{s_2} \right)}.$$

Дифференцируя логарифмы этих выражений, получим условия равновесия

$$\frac{1 - \frac{W_1^2}{s_1^2}}{s_1 + \frac{W_1^2}{s_1}} = \frac{\partial \lambda}{\partial s_1} \frac{T_1 - T_2}{(\lambda + T_1)(\lambda + T_2)}; \quad \frac{1 - \frac{W_2^2}{s_2^2}}{s_2 + \frac{W_2^2}{s_2}} = \frac{\partial \lambda}{\partial s_2} \frac{T_2 - T_1}{(\lambda + T_2)(\lambda + T_1)}.$$

Учитывая (2.20), приведем эти условия к виду

$$\frac{\lambda + T_1}{s_1 + \frac{W_1^2}{s_1}} \left(1 - \frac{W_1^2}{s_1^2} \right) = \frac{T_1 - T_2}{(\lambda + T_1)(\lambda + T_2)} \left[\frac{s_1}{(\lambda + T_1)^2} + \frac{s_2}{(\lambda + T_2)^2} \right]^{-1},$$

$$\frac{\lambda + T_2}{s_2 + \frac{W_2^2}{s_2}} \left(1 - \frac{W_2^2}{s_2^2} \right) = \frac{T_2 - T_1}{(\lambda + T_1)(\lambda + T_2)} \left[\frac{s_1}{(\lambda + T_1)^2} + \frac{s_2}{(\lambda + T_2)^2} \right]^{-1}.$$

Наконец, складывая эти два уравнения, получим

$$\alpha_1(s_1 - W_1) + \alpha_2(s_2 - W_2) = 0, \quad (2.21)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{(\lambda + T_1) \left(1 + \frac{W_1}{s_1} \right)}{s_1^2 + W_1^2} > 0, \quad \alpha_2 = \frac{(\lambda + T_2) \left(1 + \frac{W_2}{s_2} \right)}{s_2^2 + W_2^2} > 0.$$

Заметим, что если $T_1 < T_2$, то $s_1^* < W_1$, $s_2^* > W_2$, а если $T_1 > T_2$, то $s_1^* > W_1$, $s_2^* < W_2$. Наконец, при $T_1 = T_2$, $s_1^* = W_1$, $s_2^* = W_2$. Таким образом, при нормировании целевых функций тенденция к завышению оценок объемов операций всеми организациями исчезает. Можно сказать, что в среднем сообщаются достоверные оценки объемов работ, так как взвешенная (с положительными весами) сумма отклонений равна 0 (условие (2.21)).

У п р а ж н е н и е 2.1. Проведите исследование ситуаций равновесия для случая n организаций. Будут ли иметь место условия «достоверности в среднем», аналогичные (2.21)? В каком случае $\mathbf{s}^* = \mathbf{W}$ — единственная ситуация равновесия?

У п р а ж н е н и е 2.2. Рассмотрите задачу с критерием эффективности (2.15).

Глава IV

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

В этой главе мы рассмотрим три задачи: выпуск продукции в заданном отношении, планирование выпуска новых приборов и назначение проектов. Все задачи описываются линейными моделями. Учитывая широкую популярность линейных моделей оптимального планирования в экономико-математической литературе, весьма важно рассмотреть специфические особенности функционирования систем, описываемых линейными моделями, с позиций теории активных систем.

§ 1. Выпуск продукции в заданном отношении

Рассмотрим систему, состоящую из центра и n элементов (предприятий), каждый из которых может выпускать продукцию m различных видов. Обозначим T — продолжительность планируемого периода, x_{ij} — продолжительность работы предприятия i по выпуску продукции вида j , r_{ij} — максимальный выпуск продукции j -го вида предприятием i за единицу времени (реальный выпуск может быть меньше этого максимального при плохой организации производства, наличии простоев оборудования и т. д.). При заданном плане $x = \{x_{ij}\}$ продукции вида j будет выпущено $z_j \leq \sum_i r_{ij} x_{ij}$. Поставим задачу определить план выпуска, обеспечивающий максимальный выпуск продукции в заданном отношении $B_1 : B_2 : \dots : B_m$,

$$\Phi(z) = \min_i \frac{z_i}{B_i} \xrightarrow{x} \max \quad (1.1)$$

при условиях $x_{ij} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = T. \quad (1.2)$$

В качестве целевых функций предприятий примем объем реализованной продукции (предполагаем, что вся произведенная продукция будет реализована)

$$f_i(\lambda, z_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j z_{ij},$$

где λ_j — цена продукции j -го вида. При заданных λ целевая функция является строго возрастающей функцией z_{ij} , поэтому $z_{ij} = r_{ij}x_{ij}$ и

$$f_i(\lambda, z_i) = \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j r_{ij} x_{ij}. \quad (1.3)$$

На цены продукции наложены ограничения $\sum_{j=1}^m \lambda_j B_j = c$, где c — цена набора $\{B_j\}$. Соответственно целевая функция системы при подстановке $z_{ij} = r_{ij}x_{ij}$

$$\Phi(z) = \Psi(x, r) = \min_i \frac{1}{B_i} \sum_{j=1}^n r_{ij} x_{ij}. \quad (1.4)$$

Ограничимся исследованием встречного способа формирования данных. Обозначим $\{s_{ij}\}$ оценки коэффициентов $\{r_{ij}\}$, сообщаемые предприятиями центру. Примем, что $d \leq s_{ij} \leq D$ ($d > 0$, $D < \infty$). Мы уже убедились в предыдущих главах в высокой эффективности закона ОУ для ряда моделей. Исследуем его эффективность для рассматриваемой задачи. Заметим, что функция предпочтения

$$\eta_i(\lambda, x_i, s_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j s_{ij} x_{ij} \quad (1.5)$$

достигает максимума на множестве возможных планов i -го предприятия

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = T, \quad x_{ij} \geq 0 \quad (1.6)$$

в точке $\{x_{ij}\}$ вида $x_{ik} = T$, $x_{ij} = 0$ для $j \neq k$, причем $\lambda_k s_{ik} = \max_j \lambda_j s_{ij}$.

Поэтому условия совершенного согласования можно записать в виде

$$(\max_k \lambda_k s_{ik} - \lambda_j s_{ij}) x_{ij} = 0. \quad (1.7)$$

Теперь закон ОУ можно записать как решение следующей задачи:

$$\min_i \frac{1}{B_i} \sum_{j=1}^n s_{ij} x_{ij} \rightarrow \max_x \quad (1.8)$$

при условиях (1.2) и (1.7).

Проведем исследование законов ОУ при гипотезе слабого влияния (СВ), т. е. предполагая, что предприятия не учитывают влияния сообщаемых оценок $\{s_{ij}\}$ на вектор цен λ . Заметим, во-первых, что условия равновесия при гипотезе (СВ), имеют вид (в классе G^1)

$$(\max_k \lambda_k r_{ik} - \lambda_j r_{ij}) x_{ij} = 0. \quad (1.9)$$

Сравнивая (1.7) и (1.9), легко видеть, что ситуация $s^* = r$ является равновесной. Более того, она «не хуже» любой другой ситуации равновесия. Действительно, пусть s^* ситуация равновесия и $s_i^* \neq r_i$. Тогда, сообщая $s_i = r_i$, предприятие i ожидает получить (при гипотезе (CB)_i) объем реализации $T \max_k \lambda_k r_{ik}$, т. е. столько же, сколько в ситуации s^* .

Теорема 4.1. Эффективность K_{oy} закона ОУ при гипотезе (CB)_i равна 1.

Доказательство. Рассмотрим задачу оптимального планирования

$$c \min_j \frac{1}{B_j} \sum_{i=1}^n r_{ij} x_{ij} \rightarrow \max_x \quad (1.10)$$

при условиях (1.2). Введем переменную $\gamma = \min_j \frac{1}{B_j} \sum_i r_{ij} x_{ij}$ и запишем задачу (1.10), (1.2) как задачу линейного программирования

$$c\gamma \rightarrow \max, \quad \gamma B_j - \sum_i r_{ij} x_{ij} = 0, \quad \sum_j x_{ij} = T.$$

Строго нужно было писать ограничения задачи в форме неравенств. Однако можно показать, что в оптимальном решении все ограничения выполняются как равенства.

Выпишем двойственную задачу (см. приложение 2), определив двойственные переменные $\{v_i\}$, $\{\lambda_j\}$

$$T \sum_i v_i \rightarrow \min$$

при условиях $v_i, \lambda_j \geq 0$,

$$v_i - \lambda_j r_{ij} \geq 0, \quad \sum_j \lambda_j B_j \geq c.$$

Заметим теперь, что в оптимальном решении двойственной задачи $v_i = \max_k \lambda_k r_{ik}$. Кроме того, $\sum_j \lambda_j B_j = c$, так как $\gamma > 0$. Выпишем соотношения дополняющей нежесткости

$$(v_i - \lambda_j r_{ij}) x_{ij} = (\max_k \lambda_k r_{ik} - \lambda_j r_{ij}) x_{ij} = 0. \quad (1.11)$$

Сравнивая (1.11) с условиями равновесия (1.9) видим, что они совпадают. Но соотношения дополняющей нежесткости являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности решения прямой и двойственной задач. Следовательно, любая ситуация равновесия определяет оптимальный план задачи и значит $K_{oy} = 1$. Теорема доказана.

Проведем теперь исследование законов ОУ с позиций принципа максимального гарантированного результата, предполагаемая гипотеза (СВ)₂.

Теорема 4.2. При гипотезе (СВ)₂ сообщение достоверных оценок — гарантирующая стратегия предприятия.

Доказательство. Согласно гипотезе (СВ)₂, предприятие может ожидать установления гарантирующих цен $\lambda^r(s_i)$ при сообщении любой вектор-оценки $d_i \leq s_i \leq D_i$. Покажем, что гарантирующие цены удовлетворяют условиям

$$\lambda_j^r s_{ij} = \text{const}_i. \quad (1.12)$$

Действительно, пусть Q — множество видов продукции таких, что $\lambda_j^r s_{ij} = \max_k \lambda_k^r s_{ik}$ для $j \in Q$ и существует $q \notin Q$. Тогда можно увеличить цену λ_q^r до λ_q' и при этом уменьшить цены λ_j^r до λ_j' , $j \in Q$, сохранив условия $\lambda_j' s_{ij} = \max_k \lambda_k' s_{ik}$ для всех $j \in Q$ и $\lambda_q' s_{iq} < \max_k \lambda_k' s_{ik}$.

Очевидно, что при этом целевая функция элемента $\sum_j \lambda_j^r x_{ij} r_{ij} < \sum_j \lambda_j' x_{ij} r_{ij}$, так как $x_{ij} > 0$ только для $j \in Q$. А это противоречит определению гарантирующих цен. Из (1.12) и условия $\sum_j \lambda_j^r B_j = \sigma$ получаем

$$\lambda_j^r = \frac{\sigma}{s_{ij} \sum_k \frac{B_k}{s_{ik}}}.$$

Гарантированное значение целевой функции i -го элемента

$$\varphi_i^r(s_i) = \sum_j \lambda_j^r r_{ij} x_{ij} = \min_j \frac{\sigma r_{ij}}{s_{ij} \sum_k \frac{B_k}{s_{ik}}}. \quad (1.13)$$

Поскольку φ_i^r инвариантно к умножению всех s_{ij} на положительный множитель, то можно положить $\sum_k \frac{B_k}{s_{ik}} = M_i$. Решая задачу максимизации φ_i^r при этом условии, получаем

$$s_{ij}^r = r_{ij} \frac{\sum_k \frac{B_k}{r_{ik}}}{M_i}$$

и, следовательно, любая стратегия вида $s_i^r = \mu_i r_i$ ($\mu_i > 0$) является гарантирующей. В частности, при $\mu_i = 1$ получаем $s_i^r = r_i$. В отличие от равновесных ситуаций не любая гарантирующая

ситуация дает оптимальный план выпуска продукции. Положение облегчается тем обстоятельством, что все гарантирующие стратегии $s_i^r = \mu_i r_i$ эквивалентны с точки зрения интересов предприятия. Поэтому достаточно ввести слабые штрафы за искажение данных (которые фактически всегда присутствуют в реальных системах), чтобы обеспечить единственность гарантирующей ситуации $s = r$, которая дает оптимальный план выпуска продукции. Таким образом, ситуация $s = r$, является и равновесной и гарантирующей при соответствующих гипотезах СВ.

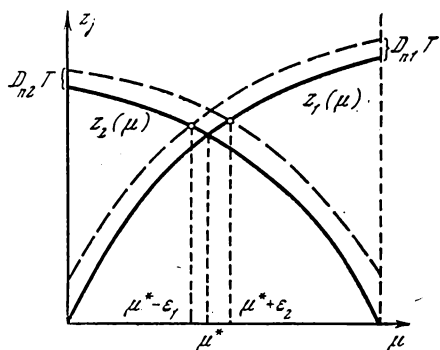


Рис. 4.1

Займемся проверкой правдоподобности гипотез СВ. Что касается гипотезы $(СВ)_2$, то здесь вопрос решается просто.

Теорема 4.3. Для любой стратегии s_i найдутся стратегии $\{s_j, j \neq i\}$ такие, что в законе ОУ $\lambda(s) = \lambda^r(s_i)$.

Доказательство. Достаточно взять $s_j = s_i$ для всех $j \neq i$. Так как все виды продукции должны выпускаться, то в силу условий совершенного согласования для любого j и хотя бы одного k должно быть

$$\lambda_j s_{ij} = \lambda_j s_{kj} = \max_q \lambda_q s_{kq} = \max_q \lambda_q s_{iq}.$$

Следовательно, $\lambda_j s_{ij} = \text{const}$, а значит, $\lambda(s) = \lambda^r(s_i)$. Таким образом, гипотеза $(СВ)_2$ является для данной задачи уже не гипотезой, а фактом.

Что касается гипотезы $(СВ)_1$, то здесь дело обстоит сложнее. Исследуем случай двух видов продукции. Примем для упрощения $B_1 = B_2 = 1$. Нас интересует влияние оценок отдельного предприятия (пусть это предприятие с номером n) на цены λ_1 и λ_2 . Рассмотрим систему из $(n-1)$ предприятий без n -го в ситуации $s_i = r_i, i = 1 \div (n-1)$. Построим зависимость выпусков продукции первого и второго вида от цен λ_1 и λ_2 . Поскольку в силу условий совершенного согласования предприятие i выпускает продукцию первого вида, если $\lambda_1 r_{i1} \geq \lambda_2 r_{i2}$, и второго,

если $\lambda_1 r_{i1} \leq \lambda_2 r_{i2}$, то с увеличением отношения цен $\mu = \lambda_1 / \lambda_2$ выпуск продукции первого вида растет, а второго вида падает. На рис. 4.1 приведены примерные графики выпусков $z_1(\mu)$ и $z_2(\mu)$ (на самом деле эти графики являются кусочно-постоянными функциями, но при достаточно большом числе предприятий их можно приближенно представить гладкими кривыми). Точка μ^*

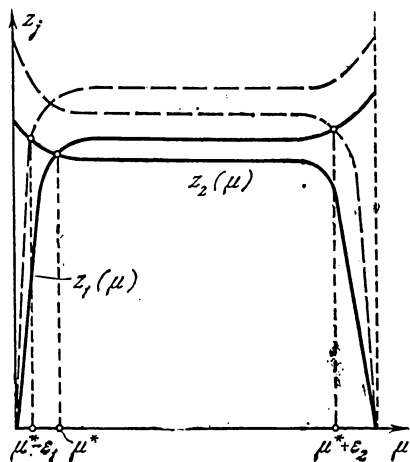


Рис. 4.2

определяет отношение цен (а значит, и сами цены, поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 = c$), при которых выпуск в заданном отношении 1:1 максимален в системе из $(n-1)$ предприятий. Включим предприятие n в систему и посмотрим, как может измениться отношение $\mu = \lambda_1 / \lambda_2$ в зависимости от оценок s_{n1} , s_{n2} , сообщаемых предприятием n . Пунктирными линиями на рис. 4.1 показаны графики $z_1(\mu) + DT$ и $z_2(\mu) + DT$, соответствующие максимальным оценкам выпуска продукции первого и второго вида. Точки пересечения кривой $z_1(\mu) + DT$ с $z_2(\mu)$ и кривой $z_2(\mu) + DT$ с $z_1(\mu)$ определяют максимальные изменения отношения цен $(\mu^* - \varepsilon_1)$ и $(\mu^* + \varepsilon_2)$. Очевидно, что если «вес» отдельного предприятия в системе мал (т. е. DT малы по сравнению с $z_1(\mu^*)$ и $z_2(\mu^*)$), то малым будет и изменение отношения цен $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ при изменении оценок s_{n1} и s_{n2} . Следовательно, гипотеза слабого влияния будет правдоподобна при достаточно большом числе предприятий. Этот вывод, однако, справедлив, если наклон кривых в точке μ^* не близок к 0. В противном случае влияние отдельного предприятия на цены продукции может быть значительным, даже если его «вес» в системе мал. Например, если $(n-1)$ предприятий распадутся на примерно равные группы специализированных предприятий по выпуску первого и второго видов продукции (рис. 4.2), то изменение оценок s_{n1} , s_{n2} довольно сильно влияет на отношение цен, даже при малых вели-

чинах DT . Учитывая, что планирование специализированных групп предприятий целесообразно проводить отдельно, можно считать при большом числе предприятий гипотезу слабого влияния достаточно правдоподобной.

§ 2. Планирование выпуска новых приборов

Пусть n предприятий выпускают приборы, используемые в m отраслях. Обозначим A_i выпуск i -го предприятия (мощность предприятия), B_j — потребность j -й отрасли и примем, что $\sum_i A_i = \sum_j B_j$. Пусть разработан новый вариант прибора, применение которого в отрасли j дает дополнительный эффект q_j по сравнению со старым образцом. Однако его выпуск на предприятии i требует дополнительных затрат r_i . Требуется определить, каким предприятиям выпускать новые приборы, в каком количестве и в каких отраслях их применять, чтобы эффективность новой продукции с учетом дополнительных затрат была максимальной. Обозначим x_i количество новых приборов, планируемое предприятию i , y_j — количество новых приборов, используемое в отрасли j . Тогда задачу можно записать в следующем виде. Определить $x_i \geq 0$, $y_j \geq 0$ такие, что

$$\sum_j y_j q_j - \sum_i x_i r_i \rightarrow \max, \quad x_i \leq A_i, \quad y_j \leq B_j, \quad \sum_j y_j - \sum_i x_i \leq 0. \quad (2.1)$$

Будем считать, что дополнительные эффекты $\{q_j\}$ от применения новых приборов в отраслях известны центру. Что касается дополнительных затрат $\{r_i\}$, то примем, что центру известны лишь границы их возможных значений $d \leq r_i \leq D$. В то же время предприятие может оценить величину дополнительных затрат r_i точно.

Для определения оптимального плана задачи (2.1) рассмотрим двойственную задачу, определив двойственные переменные $u_i \geq 0$, $v_j \geq 0$ и λ :

$$\sum_i u_i A_i + \sum_j v_j B_j \rightarrow \min, \quad u_i - \lambda \geq -r_i, \quad v_j + \lambda \geq q_j. \quad (2.2)$$

Заметим, что

$$u_i = \max(0; \lambda - r_i), \quad v_j = \max(0; q_j - \lambda). \quad (2.3)$$

Пусть r_i упорядочены по возрастанию ($r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$), а q_j упорядочены по убыванию ($q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_m$). Тогда оптимальное решение определяется следующим образом. Строим графики $A(\lambda) = \sum_{r_i \leq \lambda} A_i$ и $B(\lambda) = \sum_{q_j \geq \lambda} B_j$ (рис. 4.3).

Точка их пересечения $\tilde{\lambda}$ определяет оптимальный выпуск $\sum_i \tilde{x}_i$ и потребление $\sum_j \tilde{y}_j$ новых приборов (решение может быть не единственным, если графики имеют общий вертикальный отрезок).

Пусть целевые функции предприятий

$$f_i(\lambda, x_i, z_i) = \lambda x_i - z_i,$$

где λ — надбавка к цене новых приборов, а $z_i \geq r_i x_i$ дополнительное увеличение затрат на их выпуск (f_i определяет дополнитель-

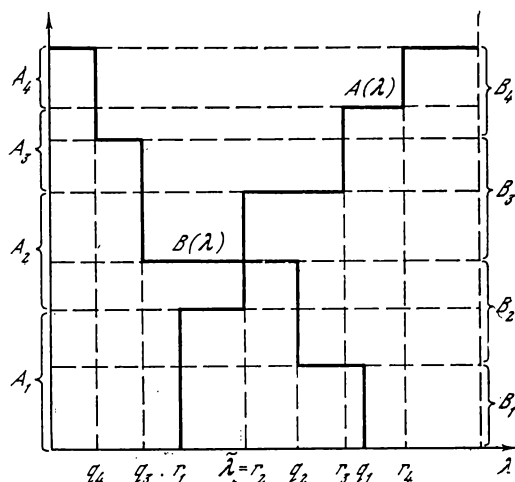


Рис. 4.3

ную прибыль предприятия от выпуска новых приборов). Рассмотрим закон ОУ при встречном способе формирования данных, обозначив s_i оценку дополнительных затрат, сообщаемую i -м предприятием в центр;

$$\sum_j y_j q_j - \sum_i x_i s_i \rightarrow \max, \quad y_j \leq B_j, \quad x_i \leq A_i, \quad \sum_{j=1}^m y_j \leq \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.4)$$

$$(\lambda - s_i) x_i = \max_{0 \leq y \leq A_i} (\lambda - s_i) y. \quad (2.5)$$

В случае неединственности выбираем решение с максимальным выпуском новых приборов $\left(\sum_i x_i\right)$ и с минимальной добавкой цены λ . Если и таких решений несколько, берем любое из них.

Проведем анализ ситуаций равновесия при гипотезе $(CB)_1$. Условия равновесия, очевидно, имеют вид

$$(\lambda - r_i) x_i = \max_{0 \leq y \leq A_i} (\lambda - r_i) y. \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что любой ситуации равновесия при гипотезе $(CB)_1$ соответствует оптимальный план производства и потребления новых приборов (докажите самостоятельно). Равновесной является, в частности, ситуация $s^* = g$. Определим теперь гарантирующие стратегии при гипотезе $(CB)_2$. Если $s_i > r_i$, то гарантирующим (наименее благоприятным) является любое управление $\lambda^r \leq s_i$ и план $x_i = 0$, а гарантированный результат равен 0.

Если $s_i < r_i$, то $\lambda^r = s_i$, $x_i = A_i$ и гарантированный результат $(s_i - r_i) A_i < 0$. Наконец, если $s_i = r_i$, то любое $\lambda^r \leq s_i$ является гарантирующим и гарантированный результат равен нулю. Легко видеть, что любая стратегия $s_i \geq r_i$ является гарантирующей. Таким образом, даже при гипотезе $(CB)_2$ в системе может наблюдаться тенденция к завышению оценок дополнительных затрат на выпуск новых приборов. Достаточно, однако, слабых штрафов за отклонение планируемых дополнительных затрат s_i от реальных r_i для того, чтобы сообщение достоверных оценок было единственной гарантирующей и равновесной стратегией каждого предприятия.

Займемся обоснованием гипотез $(CB)_1$ и $(CB)_2$. Что касается гипотезы $(CB)_2$, то она справедлива, как и в предыдущей задаче. Достаточно положить $s_j = s_i$ для всех $j \neq i$, тогда $\lambda(s) = s_i = \lambda^r$.

Для обоснования гипотезы $(CB)_1$ вернемся к рис. 4.3.

Если предприятие 2 увеличит оценку s_i до q_2 , то надбавка к цене будет равна $q_2 > r_2$. Для более детального анализа рассмотрим случай одинаковых предприятий $A_i = A$, $r_i = r$, (рис. 4.4). Заметим, что в ситуации равновесия при гипотезе $(CB)_1$ надбавка к цене $\lambda^* = r$ и дополнительная прибыль всех предприятий равна нулю. Если предприятие i увеличит оценку s_i , то его план по выпуску новой продукции будет равен 0, если $A \leq B_i$. В этом случае выпуск новой продукции передадут другому предприятию, а надбавка к цене останется прежней. Таким образом, если

$$B_i = \sum_l B_l - X^* = nA - X^* \geq A,$$

то гипотеза слабого влияния выполняется. Легко видеть, что при $X^* < nA$ гипотеза выполняется при достаточно большом числе предприятий $n \geq 1 + \frac{X^*}{A}$. Если $X^* = nA$, т. е. все предприятия

в ситуации равновесия выпускают новую продукцию, то в системе будет наблюдаться тенденция к завышению оценок допол-

нительных затрат на выпуск новых приборов. Выходом является создание некоторого запаса мощностей ($nA > \sum_i B_i$). В этом

случае $X^* \leq \sum_i B_i < nA$, и при достаточно большом числе предприятий гипотеза слабого влияния выполняется. Более того, увеличение запаса мощностей позволяет обеспечить выполнение гипотезы (СВ)₁ и при малом числе предприятий, если

$$A \geq \frac{B}{n-1}, \quad B = \sum_i B_i.$$

Так, при $A = \frac{B}{n-1}$, избыток мощностей равен $nA - B = \frac{n}{n-1}B - B = \frac{B}{n-1}$, т. е. одно предприятие*является резервным (конечно, оно не простаивает, а загружено производством другой продукции, но в случае необходимости может переключиться на выпуск новых приборов).

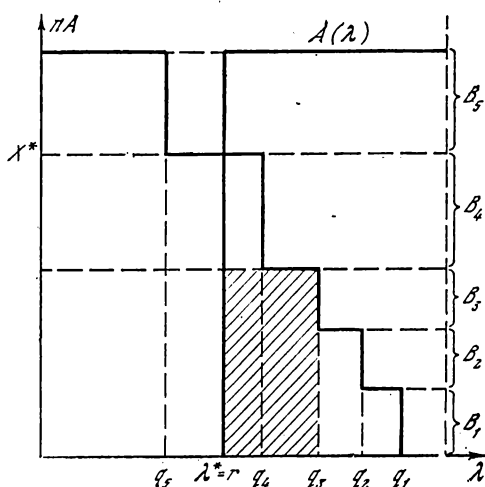


Рис. 4.4

Исследуем, наконец, случай $n=1$, т. е. когда одно предприятие является монопольным производителем приборов. Вернемся к рис. 4.4. Если предприятие сообщит оценку $s_i = q_k$, то надбавка к цене будет равна q_k , а дополнительная прибыль предприятия составит

$$\Pi_k = (q_k - r) \sum_i^k B_i.$$

Заметим, что Π_k равна площади прямоугольника со сторонами

$(q_k - r)$ и $\sum_1^k B_j$ (на рис. 4.4 заштрихован прямоугольник Π_3).

Очевидно, предприятие сообщит оценку, для которой соответствующая площадь максимальна. Надбавку к цене в этом случае будем называть монопольной.

У п р а ж н е н и е 2.1. Определите равновесие Нэша в системе из трех предприятий. Данные о предприятиях приведены ниже

i	1	2	3
A_i	30	40	50
r_i	3	5	7.

Приборы используются в двух отраслях: $q_1=8$, $q_2=6$, $B_1=40$, $B_2=70$. Мощность какого предприятия и на сколько нужно увеличить, чтобы выполнялась гипотеза $(CB)_1$?

У п р а ж н е н и е 2.2. Пусть эффекты $\{q_j\}$ от применения новых приборов в центре не известны. Оценки $\{\sigma_j\}$ этих эффектов сообщаются отраслями — потребителями приборов. Целевые функции отраслей $(q_j - \lambda) y_j$. Проведите исследование закона ОУ при гипотезах $(CB)_1$ и $(CB)_2$.

У п р а ж н е н и е 2.3. Пусть имеется k новых образцов приборов. Обозначим r_{il} дополнительные затраты на выпуск образца l предприятием i , q_{ji} эффект от применения образца l в отрасли j . Определите закон ОУ и проведите его исследование, предполагая гипотезы слабого влияния.

§ 3. Задача назначения проектов

Рассмотрим еще одну задачу, также описываемую линейной моделью. Имеются n организаций и n проектов. Каждой организации назначается один и только один проект. Обозначим $r_{ij} > 0$ вероятность успешной реализации проекта j организацией i в заданный срок, $x_{ij} = 1$, если проект j назначен организации i и $x_{ij} = 0$ — в противном случае. Тогда вероятность успешной реализации проекта j в срок $\sum_i r_{ij} x_{ij}$, а вероятность успешного за-

вершения в срок всех проектов $\prod_j \sum_i r_{ij} x_{ij}$. Поставим задачу назначить проекты организациям таким образом, чтобы вероятность их успешной реализации была максимальной:

$$\Phi(x) = \prod_j \sum_i r_{ij} x_{ij} \xrightarrow{x} \max \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1. \quad (3.2)$$

В случае успешной реализации проекта j организация-исполнитель получает премию μ_j . Ожидаемая премия организации i равна, очевидно,

$$\sum_j \mu_j r_{ij} x_{ij}. \quad (3.3)$$

Преобразуем задачу к виду, более удобному для исследования. Обозначив $c_{ij} = \ln(1/r_{ij}) \geq 0$, $\lambda_j = \ln \mu_j$,

$$\ln \sum_i r_{ij} x_{ij} = \sum_i (\ln r_{ij}) x_{ij} = - \sum_i c_{ij} x_{ij},$$

$$\ln \sum_j \mu_j r_{ij} x_{ij} = \sum_j (\ln \mu_j - c_{ij}) x_{ij},$$

получаем следующую задачу:

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_x \quad (3.4)$$

при ограничениях (3.2). Логарифмы целевых функций $\sum_j (\lambda_j - c_{ij}) x_{ij}$ в дальнейшем будем считать целевыми функциями организаций. Постановке (3.2), (3.4) можно дать и другую интерпретацию. Пусть c_{ij} — затраты организации i на реализацию проекта j , а λ_j — финансирование проекта из централизованного фонда. Тогда задача центра заключается в таком назначении проектов, при котором суммарные затраты минимальны. Организации заинтересованы, с одной стороны, в получении проекта, требующего небольших затрат, а с другой — в получении средств из централизованного фонда. Центр имеет ограниченную информацию о коэффициентах c_{ij} , примем, что он знает только границы затрат $0 \leq c_{ij} \leq D$. Организации могут оценить каждый проект достаточно точно, т. е. знают затраты c_{ij} на реализацию каждого проекта. Обозначим s_{ij} оценку затрат на проект j , сообщаемую организацией i в центр, $s_i = \{s_{ij}\}$ — вектор оценок i -й организации, $s = \{s_i\}$ — совокупность оценок всех организаций.

Принцип жесткой централизации

Основу законов ЖЦ составляет задача оптимизации

$$\sum_{i,j} s_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_x \quad (3.5)$$

при ограничениях (3.2). Закон образования величин $\{\lambda_j\}$ может быть произвольным. Примем, что $\{\lambda_j\}$ фиксированы и не меняются. В этом случае для каждой организации существуют вы-

годные проекты, для которых $(\lambda_j - c_{ij})$ максимальна. Рассмотрим, например, матрицу затрат

$$\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \text{const}$. Легко видеть, что для всех организаций предпочтителен первый проект. Желая его получить, организации сообщат минимальные оценки 0 по первому проекту и максимальные оценки D — по остальным

$$S = \begin{pmatrix} 0 & D & D \\ 0 & D & D \\ 0 & D & D \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Любое назначение проектов будет оптимальным в смысле критерия (3.5). В этом случае центр использует какое-либо правило однозначного выбора решения, например, «назначать спорный проект организации с меньшим номером». Первый проект получает организация 1, второй — 2. Заметим, что ситуация (3.6) не является равновесной, поскольку организация 3 может улучшить свое положение, сообщив оценку 0 по второму проекту. Возможные ситуации равновесия

$$S^* = \begin{pmatrix} 0 & D & D \\ s_{21} & 0 & D \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

У п р а ж н е н и е 3.1. Покажите, что все ситуации равновесия имеют вид (3.7) (при выбранном правиле приоритета организаций) и любой из них соответствует одно и то же назначение проектов $x_{11} = x_{22} = x_{33} = 1$ (остальные $x_{ij} = 0$) с суммарными затратами $\Phi^* = 29$ (минимальные затраты на реализацию всех проектов — $\Phi_m = 16$).

У п р а ж н е н и е 3.2. Проведите анализ ситуаций равновесия для произвольной матрицы $\|c_{ij}\|$, считая $\lambda_j = \text{const}$ для всех j .

Легко видеть, что назначение проектов определяется в основном субъективным правилом приоритета организаций. Так, если центр в случае неоднозначности решения отдает предпочтение второй организации, а затем первой, то назначение проектов в ситуации равновесия $x_{21} = x_{12} = x_{33} = 1$ (остальные $x_{ij} = 0$) с суммарными затратами 28.

Займемся исследованием гарантирующих стратегий. Нетрудно показать, что гарантирующими являются ситуации (3.7), в которых $s_{21}, s_{31}, s_{32}, s_{33}$ — произвольные (предоставляем читателям сделать это самостоятельно). Таким образом, назначение проектов в законах ЖЦ может быть самым произвольным и в существенной степени зависит от приоритета организаций при назначении спорных проектов.

Более интересные выводы можно получить, вводя в целевые функции штрафы за отклонение планируемых затрат s_{ij} от реальных c_{ij}

$$\sum_j (\lambda_j - c_{1j} - \alpha |s_{1j} - c_{1j}|) x_{1j}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Пусть по-прежнему при назначении спорных проектов приоритет имеет организация с меньшим номером и $\lambda_j = \text{const}$ для всех j .

Определим гарантирующую стратегию для первой организации. Пусть $c_{11} \leq c_{12} \leq \dots \leq c_{1n}$. Заметим, что сообщая оценки $s_{11} = 0$, $s_{1j} = D$, $j \neq 1$, организация 1 гарантированно получает первый проект. Ее выигрыш при этом

$$\lambda - [c_{11} + \alpha c_{11}] = \lambda - c_{11}(1 + \alpha).$$

Аналогично организация 1 может получить проект j , при стратегии $s_{1j} = 0$, $s_{1k} = D$, $k \neq j$, выигрывая

$$\lambda - [c_{1j} + \alpha c_{1j}] < \lambda - c_{11}(1 + \alpha).$$

При любой другой стратегии $\{s_{1j}\}$ организация 1 может получить любой проект, и ее гарантированный выигрыш

$$\lambda - \max_j [c_{1j} + \alpha |s_{1j} - c_{1j}|]. \quad (3.8)$$

Максимум (3.8) достигается на стратегиях вида

$$s_{1n}^r = c_{1n}, \quad \max \left[0; c_{1j} - \frac{1}{\alpha} (c_{1n} - c_{1j}) \right] \leq s_{1j}^r \leq \\ \leq \min \left[D; c_{1j} + \frac{1}{\alpha} (c_{1n} - c_{1j}) \right], \quad j \neq n \quad (3.9)$$

и равен $\lambda - c_{1n}$.

Окончательно максимальный гарантированный результат равен

$$\lambda - \min [c_{1n}; \quad c_{11}(1 + \alpha)].$$

При этом, если $c_{1n} \leq c_{11}(1 + \alpha)$, то гарантирующие стратегии имеют вид (3.9), если $c_{1n} \geq c_{11}(1 + \alpha)$, то $s_{11}^r = 0$, $s_{1j}^r = D$, $j \neq 1$. Заметим, что с увеличением α для стратегий вида (3.9) разность $|s_{1j}^r - c_{1j}|$ уменьшается. При значении $\alpha > 1$ реальные затраты организации при сообщении оценок $s_{1j} > c_{1j}$ будут равны s_{1j} (объясните, почему?) и гарантирующими будут стратегии вида (если $c_{1n} \leq c_{11}(1 + \alpha)$) $s_{1n}^r = c_{1n}$, $\max \left[0; c_{1j} - \frac{1}{\alpha} (c_{1n} - c_{1j}) \right] \leq s_{1j}^r \leq c_{1n}$, $j \neq n$. Наконец, при сильных штрафах ($\alpha = \infty$) гарантирующие стратегии имеют вид ($i = 1$)

$$s_{in}^r = c_{in}, \quad c_{ij} \leq s_{ij}^r \leq c_{in}, \quad j \neq n. \quad (3.10)$$

Таким образом, даже при сильных штрафах не удастся обеспечить достоверность сообщаемых оценок.

Займемся исследованием гарантирующих стратегий для организации 2, которая имеет второй приоритет и не может гарантированно получить лучший проект. Однако, сообщая минимальные оценки по двум лучшим проектам и максимальные оценки по остальным, она гарантированно получает один из двух лучших проектов. Если принять $c_{21} \leq c_{22} \leq \dots \leq c_{2n}$, то стратегия $s_{21} = s_{22} = 0$, $s_{2j} = D$, $j \neq 1, 2$ обеспечивает гарантированный результат $\lambda - c_{22}(1 + \alpha)$.

Максимальный гарантированный результат $\lambda - \min [c_{2n}, c_{22}(1 + \alpha)]$ достигается на стратегии $s_{21}^r = s_{22}^r = 0$, $s_{2j}^r = D$, $j \neq 1, 2$, если $c_{22}(1 + \alpha) \leq c_{2n}$, и на стратегиях $s_{in}^r = c_{in}$

$$\max \left[0; c_{ij} - \frac{1}{\alpha} (c_{in} - c_{ij}) \right] \leq s_{ij}^r \leq \min \left[D; c_{ij} + \frac{1}{\alpha} (c_{in} - c_{ij}) \right], \quad (3.11)$$

если $c_{i2}(1 + \alpha) \geq c_{in}$ ($i = 2$). Наконец, в случае сильных штрафов гарантирующие стратегии имеют вид (3.10).

Рассуждения для остальных организаций проводятся аналогично, за исключением организации n . Эта организация не имеет возможности гарантированно получить какой-либо проект. Поэтому ее гарантирующие стратегии будут иметь вид (3.11), а в случае сильных штрафов — (3.10). Такой же вид будут иметь гарантирующие стратегии любой организации, если выбор плана в случае его неединственности производится случайным образом и ни одна организация не имеет приоритета в получении проектов.

Анализ ситуаций равновесия Нэша в системе со штрафами является довольно сложной задачей. Сделав ряд предположений о поведении организаций, мы определим другое понятие равновесия, более простое для исследования. Во-первых, примем, что оценки s_{ij} не завышаются, т. е. $s_{ij} \leq c_{ij}$. Обосновать такое предположение можно следующими рассуждениями. Завышение оценок по проекту j преследует цель не получить этот проект. Однако, если проект все же будет назначен организации, то она несет двойные потери: во-первых, получен невыгодный проект, а во-вторых, организация штрафует за завышение оценки. Той же цели можно достичь, занижая оценки по выгодным проектам. Штрафы при этом в определенной степени компенсируются тем, что получен выгодный проект. Во-вторых, примем, что оценки s_{ij} могут быть любыми числами (не большими c_{ij} в силу первого предположения), в том числе и отрицательными, т. е. $-\infty < s_{ij} \leq c_{ij}$. Пусть в ситуации s $x_{ik} = 1$. Обозначим Q_i множество проектов j , для которых

$$c_{ij} + \alpha (c_{ij} - s_{ij}) < c_{ik} + \alpha (c_{ik} - s_{ik}) = v_i,$$

и R_i множество проектов j , для которых

$$c_{ij} + \alpha (c_{ij} - s_{ij}) > v_i.$$

Определим следующую гипотезу поведения: организация увеличивает оценки проектов множества R_i (если это возможно) и уменьшает оценки проектов множества Q_i . Такая тактика направлена, с одной стороны, на уменьшение вероятности получить невыгодный проект из множества R_i и уменьшение штрафов в случае его получения, а с другой — на попытку получить более выгодный проект из множества Q_i . Если $Q_i = R_i = \emptyset$, то организация не меняет стратегии. Ситуацию, в которой все организации не меняют стратегий, назовем правильной ситуацией равновесия.

Т е о р е м а 4.4. Любой правильной ситуации равновесия соответствует оптимальное назначение проектов.

Доказательство. Пусть s — правильная ситуация равновесия, x — оптимальное решение соответствующей задачи назначения. Рассмотрим множество R таких пар (i, j) , для которых $s_{ij} = c_{ij} > v_i$ (очевидно, соответствующие $x_{ij} = 0$). Увеличим s_{ij} для всех $(i, j) \in R$ до

$$s'_{ij} = c_{ij} + \frac{1}{\alpha} (c_{ij} - v_i) = c_{ij} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} v_i > c_{ij}.$$

Поскольку мы увеличили значения s_{ij} такие, что $x_{ij} = 0$, то оптимальное решение задачи назначения с новыми оценками останется прежним. Однако целевая функция задачи с новыми оценками

$$\sum_{(i,j) \notin R} s_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in R} s'_{ij} x_{ij} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} - \frac{1}{\alpha} \sum_i v_i \quad (3.12)$$

эквивалентна целевой функции задачи минимизации $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$.

Следовательно, равновесный план x является оптимальным планом задачи назначения проектов.

З а м е ч а н и е. Интересно отметить, что факт оптимальности равновесного плана для закона ЖЦ при наличии штрафов был получен сначала экспериментально, как результат деловых игр, и был довольно неожиданным.

П р и м е р. Найдём правильную ситуацию равновесия для задачи с матрицей затрат ($\alpha = 0,5$)

$$\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} 5 & 6 & \boxed{7} \\ 3 & \boxed{5} & 8 \\ \boxed{4} & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

(оптимальные назначения отмечены рамками). Возьмем сначала $v_1 = 7$, $v_2 = 5$, $v_3 = 4$ (т. е. полагаем, что по назначенным проектам сообщаются достоверные оценки). Имеем

$$s'_{11} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) c_{11} - \frac{1}{\alpha} v_1 = 3c_{11} - 2v_1 = 1,$$

$$s'_{12} = 3c_{12} - 2v_1 = 4, \quad s'_{21} = 3c_{21} - 2v_2 = -1.$$

Получим матрицу

$$(s'_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \boxed{7} \\ \boxed{-1} & 5 & 8 \\ 4 & \boxed{8} & 19 \end{pmatrix}.$$

Оптимальное решение соответствующей задачи назначения $x_{13}=1$, $x_{21}=1$, $x_{32}=1$ (остальные $x_{ij}=0$) не является правильным равновесным, так как организация 3 может попытаться улучшить свое положение, уменьшая оценку по первому проекту. При оценке $s_{31}=2-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ малое число) получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{4} & 7 \\ -1 & 5 & \boxed{8} \\ \boxed{2-\varepsilon} & 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

Решение соответствующей задачи назначения $x_{12}=1$, $x_{23}=1$, $x_{31}=1$, (остальные $x_{ij}=0$), так как первая организация имеет приоритет в получении второго проекта. Это решение также не является равновесным, так как организация 2, сообщая оценки $s_{21}=-1$, $s_{22}=5-\varepsilon$, улучшает свое положение. Окончательно получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \boxed{7} \\ -1+2\varepsilon & \boxed{5-\varepsilon} & 8 \\ \boxed{2} & 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

Единственное оптимальное решение соответствующей задачи назначения $x_{13}=1$, $x_{22}=1$, $x_{31}=1$ (остальные $x_{ij}=0$) является оптимальным решением исходной задачи. Данное равновесие точнее назвать ε -равновесием. Равновесия в обычном смысле здесь не существует, поскольку при $\varepsilon=0$ оптимальным решением задачи будет $x_{12}=1$, $x_{23}=1$, $x_{31}=1$ (остальные $x_{ij}=0$) в силу приоритета первой организации в получении спорных проектов. Проверьте самостоятельно, что полученная ситуация действительно является правильной ситуацией равновесия.

Принцип открытого управления. В основе принципа открытого управления лежит задача согласованного планирования (3.2), (3.5) с условиями совершенного согласования, которые

можно записать в следующем виде

$$[\max_k (\lambda_k - s_{ik}) - (\lambda_j - s_{ij})] x_{ij} = 0. \quad (3.13)$$

Покажем, что всегда можно выбрать величину λ_j таким образом, что условия (3.13) будут выполняться для оптимального решения задачи (3.2), (3.5). Действительно, рассмотрим задачу, двойственную к (3.2), (3.5), определив двойственные переменные v_i ; λ_j

$$-\sum_i v + \sum_j \lambda_j \rightarrow \max, \quad \lambda_j - v_i \leq s_{ij}. \quad (3.14)$$

Заметим, что $v_i = \max_k (\lambda_k - s_{ik})$. Выписывая соотношения дополняющей нежесткости, легко убедиться, что они совпадают с условиями совершенного согласования (3.13). Таким образом, условия совершенного согласования автоматически выполняются, если в качестве λ_j взять оптимальные значения соответствующих переменных двойственной задачи.

Займемся исследованием ситуаций равновесия. Пусть имеет место гипотеза (CB)₁. Тогда условия равновесия (в классе G^1)

$$[\max_k (\lambda_k - c_{ik}) - (\lambda_j - c_{ij})] x_{ij} = 0. \quad (3.15)$$

Другими словами, в равновесии каждая организация получает проект с максимальной величиной $(\lambda_j - c_{ij})$. Но условия (3.15) есть не что иное, как соотношения дополняющей нежесткости для задачи (3.2), (3.4) и соответствующей двойственной задачи. Следовательно, любой ситуации равновесия при гипотезе (CB)₁ соответствует оптимальный план задачи назначения проектов.

Для нахождения ситуаций равновесия следует определить правило назначения проектов в случае неединственности решения задачи согласованного планирования. Мы примем, что центр в этом случае руководствуется правилом устойчивости назначений. А именно он организует итерационную процедуру планирования, на каждом шаге которой организации сообщают оценки s , а центр решает задачу назначения проектов. В случае, если решений несколько, выбирается план x , наиболее близкий к плану x' на предыдущей итерации, например, по величине $\sum_{i,j} |x_{ij} - x'_{ij}|$. Если близких планов тоже несколько, то берется

любой из них. Осталось договориться о поведении организации при сообщении оценок на каждой итерации. Примем, что организация, получившая на предыдущей итерации самый выгодный проект (т. е. проект с максимальной величиной $(\lambda_j - c_{ij})$) сообщает ту же самую оценку. Организации, которые не получили самого выгодного проекта, снижают оценки затрат по самым выгодным проектам по сравнению с оценками на предыдущей

итерации. Очевидно, что если на каком-либо шаге процедуры получена ситуация равновесия, то оценки на следующих итерациях не будут меняться. Рассмотрим на примере сходимость описанной процедуры к ситуации равновесия. Возьмем матрицу затрат

$$\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

и пусть на первом шаге были сообщены следующие оценки

$$S^1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 8^* & 8 \\ 3 & \boxed{8}^* & 8 \\ 3 & 8^* & \boxed{8} \end{pmatrix} \\ \lambda = (0, 5, 5)$$

Элементы матрицы S^1 , соответствующие значениям $x_{ij}=1$ в решении задачи назначения обведены кружком. «Самые выгодные» проекты отмечены звездочкой. Примем, что на каждом шаге снижение оценок по выгодным проектам равно 1. Имеем последовательно

$$S^2 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 7^* & 8^* \\ 3 & 8^* & \boxed{8} \\ 3 & \boxed{7}^* & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow S^3 = \begin{pmatrix} 3 & 6^* & \boxed{7}^* \\ \boxed{3} & 7^* & 8 \\ 3 & \boxed{7}^* & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow S^4 = \\ \lambda = (0, 4, 5) \quad \lambda = (0, 4, 5) \quad \lambda = \\ = \begin{pmatrix} 3 & 6 & \boxed{7}^* \\ 3 & \boxed{6}^* & 8 \\ \boxed{3}^* & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ = (0, 3, 4)$$

На четвертом шаге процедуры получена ситуация равновесия, определяющая оптимальный план назначения проектов.

У п р а ж н е н и е 3.3. Исследуйте сходимость описанной процедуры в общем случае.

Заметим, что оптимальные значения двойственных переменных в задаче назначения определяются с точностью до постоянного слагаемого. Для однозначного выбора λ_j примем, что $\sum_j \lambda_j = M$. Например, если λ_j финансирование проекта j из централизованного фонда, то M соответствует величине фонда.

Итак, любое равновесие при гипотезе (СВ)₁ определяет оптимальное назначение проектов. Однако для рассматриваемой задачи справедлив более сильный результат. Оказывается, и

любое равновесие Нэша (без гипотезы слабого влияния!) определяет оптимальное назначение проектов.

Теорема 4.5. Любая точка Нэша определяет оптимальный план задачи назначения проектов.

Доказательство. Достаточно показать, что любой ситуации равновесия s^* соответствует план x^* и управление λ^* такие, что

$$[\max_k (\lambda_k^* - c_{ik}) - (\lambda_j^* - c_{ij})] x_{ij}^* = 0. \quad (3.16)$$

Пусть для некоторого $x_{ij}^* = 1$ имеет место $\lambda_j^* - c_{ij} < \max_k (\lambda_k^* - c_{ik}) = \lambda_s^* - c_{is}$ (т. е. проект s более выгоден для i -го АЭ, чем полученный им проект j).

Положим $s_{is} = s'_{is} = s'_{ij} - \lambda_j^* + \lambda_s^* \leq s'_{is}$. При этом план x^* и управление λ^* остаются оптимальными планом и управлением. Пусть при $s_{is} = s'_{is}$ существует согласованный план x' , в котором $x'_{is} = 1$; положим $s_{is} = s'_{is} - \Delta$ (Δ — малое положительное число). Новой ситуации соответствует согласованный план x' и управление λ' такие, что $x'_{is} = 1$, а $\lambda'_s \geq \lambda_s^* - \Delta \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Имеем

$$-c_{is} + \lambda'_s \geq -c_{is} + \lambda_s^* - \Delta \left(1 - \frac{1}{n}\right) > -c_{ij} + \lambda_j^*,$$

если взять $\Delta < \frac{n}{n-1} (c_{is} + \lambda_s^* - c_{ij} - \lambda_j^*) > 0$. Если при $s_{is} = s'_{is}$ не существует согласованного плана, в котором $x_{is} = 1$, то существует $\Delta > 0$ такое, что при $s_{is} = s'_{is} - \Delta$ план x^* остается согласованным. Однако при этом изменится согласованное управление, причем для нового управления λ' имеет место $\lambda'_j > \lambda_j^* + \frac{1}{n} \Delta$.

При этом значение целевой функции i -го АЭ равно $c_{ij} + \lambda'_j \geq c_{ij} + \lambda_j^* + \frac{\Delta}{n} > c_{ij} + \lambda_j^*$, т. е. возрастает. Таким образом, при

нарушении условия (3.16) всегда найдется стратегия s , при которой выигрыш организации i возрастает. Поэтому (3.16) является необходимым условием для ситуации равновесия. Теорема доказана, так как условие (3.16) является необходимым и достаточным условием оптимальности плана x^* для задачи назначения с критерием $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$.

Следствие: любая ситуация равновесия является оптимальной по Парето.

Доказательство. Определим сумму целевых функций всех организаций в ситуации равновесия

$$\sum_{i,j} (\lambda_j - c_{ij}) x_{ij} = M - \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = M - C_{\min},$$

где $C_{\min}$ — значение $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ в оптимальном решении соответствующей задачи назначения. Следствие доказано, так как максимум суммы выигрышей является достаточным условием оптимальности по Парето.

Перейдем к исследованию гарантирующих стратегий. В первых, докажем, что гипотеза $(CB)_2$ выполняется для принципа открытого управления. Для этого заметим, что гарантирующее управление λ^r удовлетворяет условиям $\lambda_j^r - s_{ij} = \lambda_k^r - s_{ik}$ для любых j, k (докажите самостоятельно). Пусть теперь $s_{kj} = s_{ij}$ для всех $k \neq i$. Тогда, очевидно, для оптимальных значений двойственных переменных λ_j выполняются условия

$$\lambda_j - s_{ij} = \max_k (\lambda_k - s_{ik}),$$

следовательно, $\lambda = \lambda^r$. Теперь легко найти гарантирующие стратегии. Из условий

$$\lambda_j^r - s_{ij} = \gamma_i, \quad \sum_j \lambda_j^r = M,$$

получаем

$$\lambda_j^r = s_{ij} + \gamma_i = s_{ij} + \frac{M - S_i}{n}, \quad S_i = \sum_j s_{ij}.$$

Гарантированный результат

$$\varphi_i^r(s_i) = \min_j [\lambda_j^r - c_{ij}] = \frac{M - S_i}{n} + \min_j (s_{ij} - c_{ij})$$

достигает максимума на стратегиях вида $s_{ij}^r = c_{ij} + \gamma_i$ (γ_i — скаляр). Максимальный гарантированный результат

$$\varphi_i^r(s_i^r) = \frac{M - C_i}{n}, \quad C_i = \sum_j c_{ij}. \quad (3.17)$$

Таким образом, любая стратегия вида $c_{ij} + \gamma_i$ ($j = 1 \div n$) является гарантирующей. Отсюда сразу следует

Теорема 4.6. Любая гарантирующая ситуация определяет оптимальное назначение проектов.

Доказательство элементарно, поскольку оптимальное решение задачи назначения не меняется при добавлении к строкам матрицы $\|c_{ij}\|$ любых чисел γ_i .

Определим, какой максимальный выигрыш может получить i -я организация в ситуации равновесия по сравнению с гарантированным результатом (3.17). Сумма гарантированных результатов $M - \frac{C}{n}$, где $C = \sum_i C_i = \sum_{i,j} c_{ij}$. Следовательно, максимальное приращение выигрыша $-C_{\min} + \frac{1}{n}C \geq 0$. Равенство достигается, если

$c_{ij} = q_i + p_j$ для всех i, j . В этом случае гарантирующая ситуация $s = c$, является равновесной и сумма гарантированных выигрышей равна максимально возможной. Поэтому выигрыш любой коалиции не может быть больше суммы гарантированных выигрышей ее участников, если остальные организации применяют гарантирующие стратегии. Принцип открытого управления является весьма эффективным в задаче назначения проектов. Действительно, и равновесные и гарантирующие ситуации обеспечивают оптимальность решения задачи назначения проектов ($K_{oy} = 1$). Важно отметить, что этот результат справедлив и без гипотез слабого влияния. Наконец, достаточно слабых штрафов за отклонение планируемых s_{ij} и реальных c_{ij} затрат для того, чтобы сообщение достоверных оценок было единственной гарантирующей и равновесной стратегией организаций (имеется в виду равновесие при гипотезе $(CB)_1$).

Глава V

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали статические, детерминированные системы, состоящие из центра и активных элементов. Реальные экономические системы, как правило, имеют многоуровневую структуру (иерархические системы) и описываются динамическими моделями со случайными или неопределенными факторами. В этой главе кратко рассматриваются особенности, возникающие при управлении иерархическими, динамическими и стохастическими активными системами.

§ 1. Иерархические системы

Ограничимся исследованием особенностей управления иерархическими активными системами на примере задачи производства продукции. Рассмотрим трехуровневую систему, состоящую из центра (например, министерства), m промежуточных подсистем (объединений) и n элементов (предприятий). Обозначим Q_k множество предприятий k -го объединения. Пусть по-прежнему x_i — план i -го предприятия по выпуску продукции, z_i — затраты, причем $z_i \geq Z_i(x_i, r_i)$. Определим план k -го объединения как $X_k = \sum_{i \in Q_k} x_i$ и соответственно затраты $Z_k = \sum_{i \in Q_k} z_i$. При заданном плане затраты Z_k ограничены снизу величиной

$$W_k(X_k) = \min_{\{x_i\}} \sum_{i \in Q_k} Z_i(x_i, r_i) \quad (1.1)$$

при условии $\sum_{i \in Q_k} x_i = X_k$. В качестве целевой функции центра примем

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^n z_i = \sum_{k=1}^m \sum_{i \in Q_k} z_i = \sum_{k=1}^m Z_k \rightarrow \min. \quad (1.2)$$

Задать механизм функционирования иерархической системы это значит определить на каждом уровне способ формирования данных, целевые функции подсистем (объединений) и элементов (предприятий) и, наконец, задать законы управления как центра, так и каждой подсистемы. При этом закон управления цент-

ра и целевые функции подсистем должны выражаться через агрегированные переменные $\{X_k, Z_k\}$, а законы управления в подсистемах и целевые функции элементов — через исходные переменные $\{x_i, z_i\}$.

Рассмотрим более детально вопрос о формировании целевых функций подсистем и элементов. Если c — цена продукции, тогда прибыль от производства продукции в количестве R

$$\Pi = cR - \sum_{k=1}^m Z_k. \quad (1.3)$$

Примем, что фонд материального поощрения $\Phi_{\text{мин}}(\Pi)$ является возрастающей функцией прибыли. Часть $(1-\gamma)\Phi_{\text{мин}}$ фонда идет на поощрение работников аппарата министерства, а остаток $\gamma\Phi_{\text{мин}}$ распределяется между объединениями. Фонд материального поощрения (МП) объединения образуется в результате отчислений от объема реализации $P_k = cX_k$ и прибыли $\Pi_k = cX_k - Z_k$. Обозначим a отраслевой норматив отчислений от объема реализации, b — от прибыли. Тогда фонд МП объединения k равен

$$\begin{aligned} \Phi_k &= a P_k + b \Pi_k = b \left[\frac{a}{b} P_k + \Pi_k \right] = \\ &= b \left[c \left(1 + \frac{a}{b} \right) X_k - Z_k \right] = b [\mu X_k - Z_k], \end{aligned}$$

где $\mu = c \left(1 + \frac{a}{b} \right)$. Заметим, что величину в квадратных скобках можно интерпретировать как прибыль объединения, где μ — некоторая «отраслевая цена» продукции. Из условия $\sum_{k=1}^m \Phi_k = \gamma \Phi_{\text{мин}}$ определяем фонд МП объединения k , который и примем за его целевую функцию

$$\Phi_k = \frac{\mu X_k - Z_k}{\sum_{q=1}^m (\mu X_q - Z_q)} \gamma \Phi_{\text{мин}}. \quad (1.4)$$

В свою очередь, часть $(1-\gamma_k)\Phi_k$ фонда МП объединения идет на поощрение работников аппарата объединения, а остаток $\gamma_k \Phi_k$ распределяется между предприятиями. Обозначая a_k, b_k нормативы отчислений в фонд МП предприятия соответственно от объема реализации $s x_i$ и прибыли $s x_i - z_i$, установленные в объединении k , получим величину фонда МП предприятия i

$$f_i = b_k [\lambda_k x_i - z_i], \quad i \in Q_k,$$

где $\lambda_k = c \left(1 + \frac{a_k}{b_k}\right)$. Из условия $\sum_{i \in Q_k} f_i = \gamma_k \Phi_k$ получаем

$$f_i = \frac{\lambda_k x_i - z_i}{\sum_{j \in Q_k} (\lambda_k x_j - z_j)} \gamma_k \Phi_k, \quad i \in Q_k. \quad (1.5)$$

По аналогии с отраслевой ценой μ , норматив λ_k можно интерпретировать как «внутреннюю цену» продукции в объединении. Рассмотрим функционирование системы при встречном способе формирования данных.

I. *Этап формирования данных.* Каждое предприятие сообщает в соответствующее объединение оценку s_i эффективности производства. На основе оценок $\{s_i, i \in Q_k\}$ объединения формируют агрегированные оценки σ_k эффективности производства и сообщают их центру.

II. *Этап планирования.* На основе оценок $\{\sigma_k\}$ центр определяет «отраслевую» цену $\mu(\sigma)$ и планы $\{X_k(\sigma)\}$ выпуска продукции объединениями $\left(\sum_{k=1}^m X_k(\sigma) = R, \text{ где } R - \text{план министерства}\right)$.

Получив план X_k , каждое объединение определяет планы $\{x_i(s, X_k), i \in Q_k\}$ и «внутреннюю» цену $\lambda_k(s, X_k)$ продукции для предприятий.

III. *Этап реализации.* Каждое предприятие выпускает продукцию в количестве x_i с затратами z_i . Сумма затрат предприятий $i \in Q_k$ образует затраты объединения Z_k , $\sum_k Z_k$ — затраты министерства на выполнение плана R .

Далее определяется фонд МП министерства и последовательно фонды МП объединений и предприятий.

Перейдем к оценке эффективности различных законов управления в иерархической системе, считая $Z_i(x_i, r_i) = \frac{1}{2r_i} x_i^2$. Рассмотрим двухуровневую систему, состоящую из объединения k и входящих в него предприятий Q_k . Примем сначала, что план X_k задан. Тогда получаем задачу производства продукции в двухуровневой системе. В главе I было показано, что закон ОУ

$$x_i(s, X_k) = \frac{s_i}{S_k} X_k, \quad i \in Q_k, \quad \lambda_k(s, X_k) = \frac{X_k}{S_k}, \quad S_k = \sum_{i \in Q_k} s_i$$

является оптимальным при любом плане $X_k > 0$. Таким образом, задача выбора оптимального закона управления в объединениях решена.

Перейдем к исследованию двухуровневой системы «министерство — объединения». Определим минимальные затраты $W_k(X_k)$

в объединении на выполнение плана X_k

$$W_k(X_k) = \frac{1}{2H_k} X_k^2, \quad H_k = \sum_{i \in Q_k} r_i.$$

В данном случае зависимость $W_k(X_k)$ имеет такой же вид, как и функции $x_i^2/2r_i$ отдельных предприятий. Поэтому объединение можно представить как одно большое предприятие, имеющее коэффициент эффективности H_k . Таким образом, мы снова получили задачу производства продукции в двухуровневой системе, для которой оптимальным является закон открытого управления

$$X_k(\sigma) = \frac{\sigma_k}{\sum_{q=1}^m \sigma_q} R, \quad \mu(\sigma) = \frac{R}{\sum_{q=1}^m \sigma_q}.$$

Таким образом, на всех уровнях системы сообщаются достоверные оценки коэффициентов эффективности производства, на основе которых определяются оптимальные планы объединений и предприятий.

Рассмотрим теперь произвольные зависимости $Z_i(x_i, r_i)$. Анализ двухуровневых систем «объединение — предприятия» проводится так же, как для соответствующих моделей в I главе. В частности, при гипотезе слабого влияния закон ОУ обеспечивает достоверность оценок $\{s_i^* = r_i, i \in Q_k\}$ в ситуации равновесия и оптимальность планов $\{x_i^*, i \in Q_k\}$ (все необходимые для этого условия считаем выполненными). Однако при исследовании двухуровневой системы «министерство — объединения» возникают новые проблемы. Обозначим $W_k(X_k, \{r_i, i \in Q_k\})$ минимальные затраты объединения k на выполнение плана X_k . Пусть центр решил применить закон открытого управления. Функция предпочтения k -го объединения будет иметь вид

$$\mu X_k - W_k(X_k, \{s_i, i \in Q_k\}).$$

Однако центр получает от объединения только одну агрегированную оценку σ_k эффективности производства в объединении, а не весь набор $\{s_i, i \in Q_k\}$. В предыдущем случае функцию $W_k(X_k, \{r_i, i \in Q_k\})$ удалось точно представить в виде агрегата $W_k(X_k, H_k)$, где коэффициент H_k имел смысл эффективности производства объединения (идеальное агрегирование). Ясно, что в общем случае идеальное агрегирование невозможно. А это значит, что центр не может применить закон открытого управления. Для данного случая это не так существенно, поскольку существует много инвариантных законов управления, обеспечивающих в ситуации равновесия при гипотезе слабого влияния оптимальность плана $\{X_k^*\}$ в смысле минимума суммарных затрат $\sum_{k=1}^m Z_k^*$. Однако если затраты в системе планируются и в целевой

функции центра есть составляющая потерь при отклонении планируемых затрат от реальных, то достоверность оценки затрат $W_k(X_k)$ приобретает важное значение. Обозначим $P_k(X_k, \sigma_k)$ оценку функции затрат $W_k(X_k)$. Примем, что центр применяет закон согласованного управления с функциями предпочтения объединений

$$\mu X_k - P_k(X_k, \sigma_k). \quad (1.6)$$

Предположим, что $W_k(X_k)$ и $P_k(X_k, \sigma_k)$ — выпуклые, непрерывно-дифференцируемые функции X_k , причем $X_k^* > 0$.

Тогда в ситуации равновесия $\{\sigma_k^*\}$

$$\frac{dP_k(X_k^*, \sigma_k^*)}{dX_k} = \mu$$

в силу условий согласования и

$$\frac{dW_k(X_k^*)}{dX_k} = \mu \quad (1.7)$$

в силу условий равновесия. Пусть, например, $P_k(X_k, \sigma_k) = X_k^2/2\sigma_k$. Тогда условия согласования имеют вид $X_k^* = \mu\sigma_k^*$.

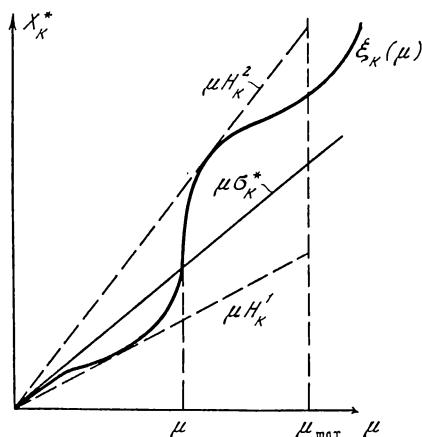


Рис. 5.1

Разрешим уравнение (1.7) относительно X_k^* и обозначим $X_k^* = \xi_k(\mu)$. На рис. 5.1 приведены графики функций $\mu\sigma_k^*$ и $\xi_k(\mu)$. Пунктиром показаны две линии μH_k^1 и μH_k^2 , являющиеся оценками снизу и сверху функции $\xi_k(\mu)$, т. е.

$$\mu H_k^1 \leq \xi_k(\mu) \leq \mu H_k^2, \quad 0 \leq \mu \leq \mu_{\max},$$

$$\frac{X_k}{H_k^2} \leq \frac{dW_k(X_k)}{dX_k} \leq \frac{X_k}{H_k^1}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2H_k^2} X_k^2 \leq W_k(X_k) \leq \frac{1}{2H_k^1} X_k^2.$$

Заметим теперь, что в ситуации равновесия $H_k^1 \leq \sigma_k^* \leq H_k^2$ для всех k . Таким образом, агрегированную зависимость $W_k(X_k)$

можно приближенно представить в виде $\frac{X_k^2}{2H_k}$, где коэффициент

эффективности H_k не известен точно в объединении, а известны только его границы $[H_k^1, H_k^2]$. Теперь закон согласованного управления с функциями предпочтения (1.6) можно интерпретировать как закон открытого управления для случая, когда объединение не знает точной величины коэффициента эффективности производства, а знает только границы $[H_k^1, H_k^2]$ его возможных значений. Теорему о достоверности информации для закона ОУ можно в этом случае сформулировать следующим образом: в ситуации равновесия при гипотезе (СВ)₁ каждая подсистема (объединение) сообщает оценку $\sigma_k^* \in [H_k^1, H_k^2]$.

Интересно отметить, что введение штрафов в целевые функции объединений за отклонение планируемых затрат $\frac{X_k^2}{2\sigma_k}$ от реальных $W_k(X_k)$ может увеличить суммарные затраты в ситуации равновесия при гипотезе слабого влияния. Действительно, пусть штрафы отсутствуют. Тогда в ситуации равновесия при гипотезе (СВ)₁ выполняются условия

$$\frac{dW_k(X_k^*)}{dX_k} = \mu, \quad (1.8)$$

которые являются необходимыми и достаточными условиями минимума суммарных затрат $\sum_{k=1}^m W_k(X_k)$ при условии $\sum_{k=1}^m X_k = R$. При введении штрафов эти условия в общем случае нарушаются, поскольку минимум штрафов достигается при условиях

$$\frac{2W_k(X_k^*)}{X_k^*} = \mu, \quad (1.9)$$

которые отличаются от (1.8).

Следовательно, равновесие в системе со штрафами уже не будет определять план $\{X_k^*,\}$ с минимальными затратами.

Выходом из этого противоречия является так называемая двухоценочная система формирования данных. Идея состоит в следующем. Вместо одной оценки σ_k вводятся две σ_k^1 и σ_k^2 . Первая по-прежнему служит для формирования плана и отраслевой цены, т. е. используется в законе управления $\{\mu(\sigma^1), X(\sigma^1)\}$, а

вторая только для прогноза затрат $P_k(X_k, \sigma_k^2)$ и соответственно для установления плана по затратам. Очевидно, что в ситуации равновесия при гипотезе (СВ)₁ выполняются условия

$$\mu\sigma_k^1 = \zeta_k(\mu), \quad \frac{1}{2\sigma_k^2}(\mu\sigma_k^1)^2 = W_k(\mu\sigma_k^1),$$

что обеспечивает оптимальность плана и совпадение планируемых и реальных затрат.

Если применение двухоценочной процедуры позволяет получить в равновесии оптимальный план и совпадение реальных и планируемых затрат, то возникает вопрос, стоит ли заботиться о построении наилучших приближений оценочных функций $P_k(X_k, \sigma_k)$ к агрегированным зависимостям $W_k(X_k)$. Приведем ряд доводов в пользу построения таких приближений.

Во-первых, чем «точнее» оценочные функции $P_k(X_k, \sigma_k)$ отражают реальные зависимости $W_k(X_k)$, тем «быстрее» будет получена ситуация равновесия, а значит, и оптимальный план в системе. Так, например, в случае идеального агрегирования, когда существует оценка $\sigma_k = H_k$ такая, что $P_k(X_k, H_k) = W_k(X_k)$ для всех X_k , ситуация равновесия получается сразу, поскольку при любой цене μ оптимальная стратегия каждого объединения при гипотезе (СВ)₁ одна и та же — сообщать оценку H_k (эта оценка и принимается за коэффициент эффективности производства в объединении). В случае «грубых» приближений для получения ситуации равновесия требуется итерационная процедура формирования плана и возникает серьезная проблема ее сходимости (не говоря уже о скорости сходимости).

Во-вторых, чем лучше приближение функций $P_k(X_k, \sigma_k)$ к $W_k(X_k)$, тем ближе оценки σ_k^1 и σ_k^2 (в случае идеального агрегирования они просто совпадают). Если различие оценок σ_k^1 и σ_k^2 достаточно мало, то практически можно перейти к однооценочной системе формирования данных, что уменьшает количество информации, получаемой от объединений.

Наконец, в-третьих, если центр должен сообщать в вышестоящий управляющий орган информацию о зависимости суммарных затрат $\Phi_{\text{млн}}(R)$ от количества R выпускаемой продукции, то определить достаточно точно эту зависимость он может, только имея достаточно точные оценки $P_k(X_k, \sigma_k)$ функций $W_k(X_k)$.

Итак, если проблема оптимального агрегирования решена и на каждом уровне построены достаточно точные агрегированные модели соответствующих подсистем, то задача определения оптимального механизма функционирования в иерархической системе сводится к рассмотрению совокупности соответствующих задач для двухуровневых подсистем.

Остановимся еще на одной проблеме. При исследовании двухуровневых систем мы считали, что целевая функция центра совпадает с целевой функцией системы. Это было оправданно, по-

сколько мы предполагаем, что целевая функция системы выражается через переменные задачи (т. е. планы x_i и затраты z_i), и соответствующее выражение берем в качестве целевой функции центра. При определении целевой функции центра в иерархической системе дело обстоит сложнее. Действительно, пусть целевая функция системы $\Phi(x, z)$ по-прежнему выражается через переменные, x_i, z_i . Однако целевая функция центра должна быть задана как функция агрегированных переменных Z_k и X_k . В задаче производства продукции нам «повезло», поскольку

$$\Phi(z) = \sum_i z_i = \sum_{k=1}^m Z_k, \text{ т. е. целевую функцию системы удалось}$$

записать как функцию агрегированных переменных. Очевидно, это не всегда возможно, что приводит к проблеме приближенного представления функции $\Phi(x, z)$ в виде функции $\Phi_c(X, Z)$.

Пусть, например, $\Phi(z) = \sum_{i=1}^n p_i z_i$, где $p_i > 0$ не все равны между

собой. Эту функцию уже не представить в виде функции от переменных Z_k . Для приближенного представления можно, например, определить $\hat{P}_k = \frac{1}{|Q_k|} \sum_{i \in Q_k} p_i$ — «средний вес» затрат k -го объ-

единения и положить

$$\Phi_c(Z) = \sum_{k=1}^m \hat{P}_k Z_k.$$

В данном случае можно, конечно, изменить систему агрегированных показателей. Так, например, определяя $Z_k = \sum_{i \in Q_k} p_i z_i$, мы по-

лучаем $\Phi_c(Z) = \sum_k Z_k$. Однако «веса» отдельных предприятий могут

меняться от одного периода планирования к другому, а частая смена системы планируемых показателей весьма нежелательна.

§ 2. Динамические модели

Рассмотрим несколько простых задач, в которых Ц решает задачу определения плана и управления не в одном, а сразу в нескольких периодах функционирования. При этом, как правило, планы отдельных периодов взаимосвязаны, что не позволяет решать задачу отдельно для каждого периода. Возникает динамическая задача определения последовательности планов x_{ik} и управлений λ_k . Заметим сразу, что формально можно рассматривать задачу как статическую, определив для каждого АЭ вектор плана $x_i = \{x_{ik}, k = 1 \div T\}$ и вектор управления $\lambda = \{\lambda_k, k = 1 \div T\}$. Поэтому принципиальных особенностей в исследовании

функционирования динамических моделей по сравнению со статическими не возникает. Однако на примере динамических моделей нам удобно рассмотреть ряд особенностей, возникающих при управлении многомерными АЭ, состояние которых описывается векторными величинами.

Итак, рассмотрим задачу производства продукции. Пусть коэффициенты эффективности производства r_i не меняются в течение планируемого интервала T . Обозначим x_{ik} — план, z_{ik} — затраты, λ_k — цена продукции в периоде k . Рассмотрим задачу оптимального планирования

$$\sum_k \sum_i p_{ik} z_{ik} \rightarrow \min (p_{ik} > 0) \quad (2.1)$$

$$\sum_i \sum_k x_{ik} = RT. \quad (2.2)$$

В данном случае «динамичность» модели определяется изменением целевой функции центра от периода к периоду.

Предполагая, что $z_{ik} \geq \frac{1}{2r_i} x_{ik}^2$, определим оптимальное решение задачи (2.1), (2.2)

$$\tilde{x}_{ik} = \frac{r_i}{p_{i\kappa} \sum_{l,q} \frac{r_l}{p_{lq}}} RT. \quad (2.3)$$

В качестве целевых функций предприятий возьмем прибыль, полученную за весь планируемый интервал,

$$f_i(\lambda, x_i, z_i) = \sum_{k=1}^T (\lambda_k x_{ik} - z_{ik}). \quad (2.4)$$

Примем, что $\lambda_k = \lambda$, т. е. цена продукции является стабильной в течение интервала T . Пусть $\pi(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$, где $x(s) = \{x_{ik}(s)\}$ — некоторый закон управления. Предположим, что $x_{ik}(s)$ — непрерывно дифференцируемые функции s_i . Выпишем условия равновесия при гипотезе (СВ)_i, считая, что равновесие достигается внутри области возможных ситуаций

$$\sum_{k=1}^T \left(\lambda - \frac{x_{ik}}{r_i} \right) \frac{\partial x_{ik}}{\partial s_i} = 0. \quad (2.5)$$

Заметим, что принцип открытого управления определяется условиями

$$\begin{aligned} \lambda - \frac{x_{ik}}{r_i} &= 0, \\ x_{ik} &= \lambda s_i, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\lambda = R/S. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получаем

$$\lambda^2 \left(1 - \frac{s_i}{r_i}\right) = 0, \quad (2.8)$$

что определяет единственную ситуацию равновесия $s^* = r$. Далее, подставляя (2.6) в (2.1), получаем при $s_i = r_i$

$$\Psi_{oy} = \sum_k \sum_i \frac{p_{ik} r_i}{2} \lambda^2 = \frac{R_2}{2H^2} \sum_i P_i r_i, \quad P_i = \sum_k p_{ik}. \quad (2.9)$$

При исследовании статической задачи производства продукции мы показали, что при гипотезе $(CB)_1$ не существует закона, более эффективного, чем закон ОУ. В данном случае это не так. Действительно, рассмотрим закон управления

$$x_{ik} = \alpha_{ik} \lambda s_i, \quad \alpha_{ik} > 0 \quad (2.10)$$

$$\lambda(s) = \frac{R}{\sum_i A_i s_i}, \quad A_i = \sum_k \alpha_{ik}. \quad (2.11)$$

Условия равновесия (2.5) для закона (2.10) примут вид

$$\sum_{k=1}^T \alpha_{ik} \left(1 - \frac{\alpha_{ik} s_i}{r_i}\right) = 0, \quad s_i^* = r_i \frac{A_i}{B_i}, \quad B_i = \sum_{k=1}^T \alpha_{ik}^2.$$

Выберем теперь α_{ik} таким образом, чтобы $A_i = B_i$. Тогда, очевидно, $s^* = r$ единственная ситуация равновесия. Таким образом, любой закон (2.10) такой, что

$$\sum_{k=1}^T \alpha_{ik} (1 - \alpha_{ik}) = 0, \quad (2.12)$$

обеспечивает в ситуации равновесия достоверность оценок $\{s_i\}$. Заметим, что при $\alpha_{ik} = 1$ мы получаем закон ОУ. Поставим задачу выбора α_{ik} , удовлетворяющих (2.12), так чтобы эффективность закона (2.10), (2.11) была максимальной. Понятно, что в общем случае мы получим закон управления более эффективный, чем закон ОУ.

Если, например, существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\sum_{k=1}^T \frac{1}{p_{ik}} \left(\gamma - \frac{1}{p_{ik}}\right) = 0,$$

то, взяв $\alpha_{ik} = 1/\gamma p_{ik}$, получим в ситуации равновесия

$$x_{ik}^* = \tilde{x}_{ik}$$

и, следовательно, $K_{oy} = 1$. Пусть теперь коэффициент эффектив-

ности производства меняется от периода к периоду, например

$$r_{ik} = r_i + \rho_i(k-1),$$

где $\rho_i > 0$ — темп роста эффективности. Оптимальный план

$$\tilde{x}_{ik} = \frac{r_i + \rho_i(k-1)}{\rho_{ik} \sum_{j,q} \frac{r_j + \rho_j(q-1)}{\rho_{jq}}} RT. \quad (2.13)$$

Обозначая s_i оценку r_i и σ_i оценку ρ_i , мы можем записать закон планирования (2.10) в виде

$$x_{ik} = \lambda \alpha_{ik} (s_i + (k-1) \sigma_i). \quad (2.14)$$

Выписывая условия равновесия при гипотезе (CB)₁, получаем

$$\sum_{k=1}^T \alpha_{ik} \left(1 - \frac{\alpha_{ik} (s_i + (k-1) \sigma_i)}{r_i + \rho_i(k-1)} \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^T (k-1) \alpha_{ik} \left(1 - \frac{\alpha_{ik} (s_i + (k-1) \sigma_i)}{r_i + \rho_i(k-1)} \right) = 0.$$

Для того чтобы $s_i^* = r_i$ и $\sigma_i^* = \rho_i$ была единственной ситуацией равновесия, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.12) и (2.15)

$$\sum_{k=1}^T (k-1) \alpha_{ik} (1 - \alpha_{ik}) = 0. \quad (2.15)$$

По сравнению с предыдущим случаем число возможных вариантов выбора α_{ik} в законе (2.14) уменьшилось, поскольку появились дополнительные условия (2.15).

Наконец, пусть предприятия сообщают непосредственно оценки s_{ik} коэффициента эффективности r_{ik} . В этом случае условия равновесия при гипотезе (CB)₁ для закона планирования

$$x_{ik} = \alpha_{ik} \lambda s_{ik} \quad (2.16)$$

примут вид $\alpha_{ik} \left(1 - \frac{\alpha_{ik} s_{ik}}{r_{ik}} \right) = 0$, или $s_{ik}^* = r_{ik} \frac{1}{\alpha_{ik}}$.

В данном случае достоверность информации обеспечивается только для закона ОУ ($\alpha_{ik} = 1$).

Рассмотренные примеры приводят к интересной проблеме. С одной стороны, желательно возможно более точное представление динамики коэффициентов эффективности по периодам. Однако это приводит к увеличению числа сообщаемых оценок, и, как следствие, к сокращению множества законов управления, обеспечивающих достоверность информации. Так, если число сообщаемых каждым предприятием оценок равно T , т. е. сооб-

щается непосредственно последовательность $\{s_{ik}\}$, то из законов вида (2.16) только закон ОУ обеспечивает достоверность оценок. С другой стороны, желательно использование «грубых» описаний динамики коэффициентов эффективности производства, требующих для своего задания небольшого числа оценок, сообщаемых предприятиями. Действительно, чем меньше оценок сообщает предприятие, тем больше законов управления, обеспечивающих достоверность информации в ситуации равновесия. Так, если сообщается одна оценка s_i — значение коэффициента эффективности в планируемом интервале, то все законы вида (2.10) при условиях (2.12) обеспечивают достоверность сообщаемой оценки. Однако в этом случае о достоверности s_i можно говорить только в пределах ошибки приближения, которая тем больше, чем меньше параметров (т. е. чем грубее модель). Проблема заключается в выборе оптимальной модели, которая, с одной стороны, обеспечивает достаточную точность описания динамики коэффициентов эффективности производства, а с другой — дает возможность выбрать достаточно эффективный закон из множества законов, обеспечивающих достоверность информации в ситуации равновесия.

Остановимся еще на одной проблеме, которая возникает при исследовании динамических моделей. До сих пор мы считали, что целевая функция предприятия в планируемом интервале равна сумме целевых функций по периодам. Пусть, однако,

$$f_i(\lambda, x_i, z_i) = \sum_{k=1}^{T_i} (\lambda x_{ik} - z_{ik}),$$

где $T_i < T$ (случай $T_i > T$ сводится к случаю $T_i = T$, который уже рассмотрен).

Ограничимся исследованием случая $r_{ik} = r_i$. Рассмотрим закон управления (2.10). Условия, обеспечивающие достоверность информации в ситуации равновесия,

$$\sum_{k=1}^{T_i} \alpha_{ik} (1 - \alpha_{ik}) = 0. \quad (2.17)$$

Проблема здесь в том, что дальновидность предприятия i , характеризующая числом периодов T_i , в центре неизвестна. А если Ц при определении α_{ik} руководствуется условиями (2.12), то (2.17) может не выполняться, что приведет к искажению сообщаемых данных. Можно предложить следующий выход. Пусть предприятия вместе с оценками s_i сообщают также оценку θ_i числа периодов T_i , которые учитываются в целевой функции предприятия. Центр определяет параметры $\alpha_{ik}(\theta_i)$ закона управления (2.10), удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{\theta_i} \alpha_{ik}(\theta_i) [1 - \alpha_{ik}(\theta_i)] = 0. \quad (2.18)$$

Возникает вопрос, при каких дополнительных условиях на $\alpha_{ik}(\theta_i)$ сообщение достоверных оценок $s_i = r_i$ является единственной равновесной стратегией предприятия. Обозначим

$$A_i(T_i, \theta_i) = \sum_{k=1}^{T_i} \alpha_{ik}(\theta_i), \quad B_i(T_i, \theta_i) = \sum_{k=1}^{T_i} \alpha_{ik}^2(\theta_i).$$

Заметим, что $s_i^* = r_i \frac{A_i(T_i, \theta_i)}{B_i(T_i, \theta_i)}$. Поэтому для того чтобы $s_i^* = r_i$, необходимо и достаточно

$$\sum_{k=1}^{T_i} \alpha_{ik}(\theta_i) [1 - \alpha_{ik}(\theta_i)] = 0. \quad (2.19)$$

Подставляя s_i^* в целевую функцию предприятия i , получим

$$\sum_{k=1}^{T_i} \lambda^2 \alpha_{ik}(\theta_i) r_i \frac{A_i[T_i, \theta_i]}{B_i[T_i, \theta_i]} \left[1 - \frac{A_i[T_i, \theta_i]}{B_i[T_i, \theta_i]} \cdot \frac{\alpha_{ik}(\theta_i)}{2} \right] = \frac{\lambda^2}{2} r_i \frac{A_i^2[T_i, \theta_i]}{B_i[T_i, \theta_i]}.$$

Условие (2.19) выполняется, если $\alpha_{ik} = 1$, что соответствует закону ОУ. Другим достаточным условием выполнения (2.19) является $\theta_i = T_i$ (в этом случае (2.19) следует из (2.18)). В свою очередь для того, чтобы сообщение достоверной оценки $\theta_i^* = T_i$ (а следовательно, и $s_i^* = r_i$) было единственной равновесной стратегией предприятия i , необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\frac{A_i^2(T_i, \theta_i)}{B_i(T_i, \theta_i)} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{T_i} \alpha_{ik}(\theta_i) \right]^2}{\sum_{k=1}^{T_i} \alpha_{ik}^2(\theta_i)}$$

достигала максимума по θ_i в т. $\theta_i = T_i$.

Рассмотрим подробно случай $T=2$ (планируемый интервал равен двум периодам функционирования). Пусть $T_i = 1$. Тогда $s_i^* = r_i / \alpha_{i1}$ и, следовательно, $\alpha_{i1} = 1$. Поскольку значение T_i центру не известно, то следует взять $\alpha_{i1} = 1$ независимо от θ_i . Далее, пусть $T_i = 2$. Тогда при $\theta_i = 1$ имеем

$$\frac{A_i^2[2, 1]}{B_i[2, 1]} = \frac{[1 + \alpha_{i2}(1)]^2}{1 + \alpha_{i2}^2(1)}.$$

Если же $\theta_i = 2$, то из условий $\alpha_{i1}(2) = \alpha_{i1} = 1$ и $\alpha_{i1}(2) + \alpha_{i2}(2) =$

$= \alpha_{i1}^2(2) + \alpha_{i2}^2(2)$ получаем $\alpha_{i2}(2) = 1$. При этом

$$\frac{[\alpha_{i1}(2) + \alpha_{i2}(2)]^2}{\alpha_{i1}^2(2) + \alpha_{i2}^2(2)} = 2.$$

Наконец, требование максимума $A_i^2(T_i, \theta_i)/B_i(T_i, \theta_i)$ при $\theta_i = T_i$ дает условие

$$[1 + \alpha_{i2}(1)]^2 < 2[1 + \alpha_{i2}^2(1)],$$

которое выполняется при любых $\alpha_{i2} \neq 1$ (проверьте самостоятельно). Окончательно получаем, что достоверность оценок $s_i^* = r_i$ в ситуации равновесия обеспечивается при выборе

$$\alpha_{i1} = 1, \alpha_{i2}(1) > 0, \alpha_{i2}(2) = 1.$$

У п р а ж н е н и е 2.1. Определите возможные значения $\alpha_{ih}(\theta_i)$, обеспечивающие достоверность оценок $s_i^* = r_i$ в ситуации равновесия для случая $T=3$ (планируемый интервал равен трем периодам функционирования).

§ 3. Стохастические активные системы

Особенности управления стохастическими системами рассмотрим на примере задачи производства продукции. Пусть коэффициент эффективности производства r_i является случайной величиной, имеющей функцию распределения $F_i(r_i)$, $d \leq r_i \leq D$. Поэтому случайной величиной являются и затраты $z_i \geq 3_i(x_i, r_i)$. Примем в качестве целевой функции системы математическое ожидание суммарных затрат

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^n M_{r_i}[z_i].$$

Найдем оптимальное решение задачи в случае $3_i(x_i, r_i) = \frac{1}{2r_i} x_i^2$.

Имеем

$$\Phi(z) = \Psi(x) = \sum_{i=1}^n \int_d^D \frac{1}{2r_i} x_i^2 dF_i(r_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\mu_i} x_i^2, \quad (3.1)$$

где

$$\mu_i = \left(\int_d^D \frac{1}{r_i} dF_i(r_i) \right)^{-1}. \quad (3.2)$$

Получили детерминированную задачу производства продукции, в которой роль коэффициента эффективности производства играет величина μ_i (очевидно, $d \leq \mu_i \leq D$). Будем предполагать, что $\mathcal{U}$ не знает вида функций распределения $F_i(r_i)$, а знает

чит, и величин μ_i . Предприятия знают соответствующие функции распределения. Если теперь взять в качестве целевых функций предприятий на этапе формирования данных ожидаемую прибыль, т. е. математическое ожидание функции $\lambda x_i - \frac{1}{2r_i} x_i^2$, то получим

$$\varphi_i(\lambda, x_i, \mu_i) = \lambda x_i - \frac{1}{2\mu_i} x_i^2. \quad (3.3)$$

Задача полностью сведена к соответствующей детерминированной постановке, подробно рассмотренной в главе I. Так, например, если каждое предприятие сообщает в Ц оценку s_i , величины μ_i , то при законе ОУ

$$x_i(s) = \frac{s_i}{S} R, \quad \lambda(s) = \frac{R}{S} \quad (3.4)$$

в ситуации равновесия при гипотезе (СВ), обеспечивается $s_i^* = \mu_i$. Заметим, что оценка s_i играет в описанной схеме функционирования двойную роль. С одной стороны, это оценка детерминированной величины μ_i , используемая для определения плана и цены в законе (3.4). С другой — это оценка случайной величины r_i , используемая для оценки затрат $w_i = \frac{x_i^2}{2s_i}$. Такая двой-

ственность оценки s_i приводит к парадоксу, с которым мы уже сталкивались в § 1 при исследовании иерархических систем: введение штрафов за отклонение реальных затрат z_i от планируемых w_i может ухудшить функционирование системы! Рассмотрим, например, кусочно-линейную целевую функцию предприятия

$$f_i(\lambda, x_i, z_i, w_i) = \lambda x_i - z_i - \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} (w_i - z_i), \quad (3.5)$$

где $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \alpha$, если $w_i \geq z_i$ и $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = -\beta$, если $w_i < z_i$. Примем, что $\alpha < 1$. Тогда $z_i = \frac{1}{2r_i} x_i^2$.

Определим математическое ожидание целевой функции

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i) &= \int_{s_i}^{s_i} \left[\lambda x_i - \frac{x_i^2}{2r_i} - \frac{\beta}{2} x_i^2 \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{s_i} \right) \right] dF_i(r_i) + \\ &+ \int_{s_i}^D \left[\lambda x_i - \frac{x_i^2}{2r_i} - \frac{\alpha}{2} x_i^2 \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i} \right) \right] dF_i(r_i) = \\ &= \lambda x_i - \frac{1}{2\eta_i(s_i)} x_i^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\eta_i(s_i) = \left[\frac{1}{\mu_i} + \alpha \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{\mu_i} \right) - (\alpha + \beta) \left(\frac{1}{s_i} F_i(s_i) - \int_d^{s_i} \frac{1}{r_i} dF_i(r_i) \right) \right]^{-1}. \quad (3.7)$$

Подставляя закон управления (3.4), получим

$$\mathcal{D}_i(s) = \lambda^2 s_i \left(1 - \frac{s_i}{2\eta_i(s_i)} \right). \quad (3.8)$$

Условия равновесия при гипотезе (СВ)₁ будут иметь вид

$$\left[1 - \frac{s_i}{\eta_i(s_i)} \right] + \frac{s_i^2}{2\eta_i^2(s_i)} \frac{d\eta_i}{ds_i} = \left[1 - \frac{s_i}{\eta_i(s_i)} \right] + \frac{1}{2} [(\alpha + \beta) F_i(s_i) - \alpha] = 0. \quad (3.9)$$

Очевидно, что $s_i = \mu_i$ не является в общем случае решением этого уравнения. А поможет ли в данном случае введение двух-оценочной системы формирования данных, как было сделано в § 1? Обозначим σ_i оценку случайной величины r_i , используемую для планирования затрат $w_i = \frac{1}{2\sigma_i} x_i^2$, а s_i — оценку величины μ_i , используемую для определения плана и цены. В этом случае выражение (3.6) примет вид

$$\varphi_i(\lambda, x_i, \sigma_i) = \lambda x_i - \frac{1}{2\eta_i(\sigma_i)} x_i^2, \quad (3.10)$$

где $\eta_i(\sigma_i)$ по-прежнему определяется выражением (3.7), если заменить s_i на σ_i . Теперь условия равновесия будут иметь уже другой вид

$$s_i^* = \eta_i(\sigma_i^*), \quad F_i(\sigma_i^*) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (3.11)$$

Для того чтобы $s_i^* = \mu_i$ была равновесной стратегией, необходимо, чтобы $\eta_i(\sigma_i^*) = \mu_i$. А для этого необходимо, чтобы

$$\frac{1}{\mu_i} F_i(\sigma_i^*) = \int_d^{\sigma_i^*} \frac{1}{r_i} dF_i(r_i). \quad (3.12)$$

Понятно, что условия (3.12) для произвольных распределений не выполняются. Таким образом, в данном случае введение штрафов только «ухудшает» план в ситуации равновесия.

Пусть теперь целевая функция центра на этапе реализации имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_i} + \left(-\delta \right) \left(\frac{1}{\sigma_i} - \frac{1}{r_i} \right) \right] x_i^2, \quad \gamma, \delta > 0, \gamma < 1,$$

что соответствует потерям в системе при несовпадении планируемых и реальных затрат. Тогда целевая функция центра на этапе планирования

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} x_i^2 \int_d^D \left[\frac{1}{r_i} + \left(-\delta \right) \left(\frac{1}{\sigma_i} - \frac{1}{r_i} \right) \right] dF_i(r_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\tilde{\eta}_i(\sigma_i)} x_i^2,$$

где

$$\tilde{\eta}_i(\sigma_i) = \left[\frac{1}{\mu_i} + \gamma \left(\frac{1}{\sigma_i} - \frac{1}{\mu_i} \right) - (\gamma + \delta) \left(\frac{1}{\sigma_i} F_i(\sigma_i) - \int_d^{\sigma_i} \frac{1}{r_i} dF_i(r_i) \right) \right]^{-1}.$$

Оптимальное решение этой задачи легко получить

$$\tilde{x}_i = \frac{\tilde{\eta}_i(\tilde{\sigma}_i)}{\sum_j \tilde{\eta}_j(\tilde{\sigma}_j)} R,$$

где $\tilde{\sigma}_i$ определяется из уравнения

$$F_i(\tilde{\sigma}_i) = \frac{\gamma}{\gamma + \delta}.$$

Заметим теперь, что если взять $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, то $\tilde{\eta}_i(\sigma_i)$ совпадает с $\eta_i(\sigma_i)$. Кроме того, в этом случае

$$\sigma_i^* = \tilde{\sigma}_i, \quad s_i^* = \eta_i(\tilde{\sigma}_i)$$

и, следовательно, план в ситуации равновесия является оптимальным.

Кратко рассмотрим постановку задачи управления стохастическими системами в более общем случае. Пусть $\Phi(z, x)$ — целевая функция центра, $f_i(\lambda, x_i, z_i)$ — целевые функции предприятий. Предполагая f_i убывающими функциями z_i , можно положить, что $z_i = Z_i(x_i, r_i)$, где r_i — коэффициент эффективности производства (случайная величина, имеющая функцию распределения $F_i(r_i)$). Подставляя $z_i = Z_i(x_i, r_i)$ в целевые функции центра и предприятий, представим их в виде $\tilde{\Psi}(x, r)$ и $\tilde{\varphi}_i(\lambda, x_i, r_i)$. Теперь задачу центра можно сформулировать как задачу стохастического программирования

$$\Psi(x) = M_r[\tilde{\Psi}(x, r)] \rightarrow \min \quad (3.13)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n x_i = R \quad (3.14)$$

(или более общем условии $x \in X$, где X — множество возможных планов).

В качестве целевых функций предприятий примем, как и ранее,

$$\varphi_i(\lambda, x_i) = M_{r_i}[\tilde{\varphi}_i(\lambda, x_i, r_i)].$$

Функции $\Psi(x)$ и $\varphi_i(\lambda, x_i)$ не известны центру, поскольку ему не известны функции распределения $F_i(r_i)$. Пусть, однако, зависимость $\Psi(x)$ и $\varphi_i(\lambda, x_i)$ от функций распределения определяется заданием конечного числа параметров q_{ij} . Например, если функции распределения $F_i(r_i, q_i)$ известны в центре с точностью до параметров q_i , то функции $\Psi(x, q)$ и $\varphi_i(\lambda, x_i, q_i)$ также будут заданы в параметрическом виде. Таким образом, получаем следующую задачу оптимального планирования

$$\Psi(x, q) \rightarrow \min_x \quad (3.15)$$

при условии (3.14).

Обозначим s_i оценки параметров q_i , сообщаемые предприятиями в центр на этапе формирования данных, $\pi(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$ закон управления. Мы получили детерминированную постановку задачи управления, которая была подробно рассмотрена в первой главе. Эффективность закона управления, по аналогии с соответствующим определением в гл. I, равна (предполагаем $\Psi_\pi(q) > 0$)

$$K(\pi) = \min_{q \in \Omega} \frac{\Psi_m(q)}{\Psi_\pi(q)},$$

где $\Psi_m(q)$ — значение целевой функции центра в оптимальном решении задачи (3.14), (3.13), а

$$\Psi_\pi(q) = \max_{s \in T(q)} \Psi(x(s), q),$$

где $T(q)$ — множество решений соответствующей игры.

ПРОСТОЙ АКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

§ 1. Описание элемента

В этой главе мы рассмотрим взаимодействие центра с одним стохастическим элементом (например, предприятием, выпускающим однородную продукцию). Задача центра — назначить (или утвердить) элементу достаточно высокий и надежный план. Состояние элемента определяется одной скалярной величиной y (реализация), имеющей функцию распределения $F(y)$. Оценка x величины y утверждается в качестве плана простого АЭ. Целевую функцию АЭ $f(x, y)$ будем называть законом стимулирования ($f(x, y)$ может соответствовать, например, величине фонда материального поощрения в зависимости от плана и его реализации).

Способность АЭ «работать с различной эффективностью в зависимости от заинтересованности» формально отразим с помощью параметрического семейства распределений

$$F_{\omega}(y) = \begin{cases} F(y), & \text{если } y \leq \omega, \\ 1, & \text{если } y > \omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

где ω — граница реализации y , устанавливаемая АЭ исходя из его интересов. Пусть, например, закон стимулирования

$$f(x, y) = y - \alpha(x - y)^2, \quad \alpha > 0,$$

где $\alpha(x - y)^2$ — штраф за отклонение реализации от плана. Анализ зависимости $f(x, y)$ (рис. 6.1а) показывает, что при $y > x + \frac{1}{2\alpha}$, $f(x, y)$ убывающая функция y . Очевидно, в этом случае АЭ устанавливает границу $\omega = x + \frac{1}{2\alpha}$ (рис. 6.1б), поскольку выпускать продукции больше, чем $x + \frac{1}{2\alpha}$, невыгодно.

Рассмотренное семейство распределений (1.1) соответствует таким параметрам, которые могут быть «сознательно уменьшены» активным элементом, если это соответствует его интересам (производительность труда, количество и качество продукции, урожай, т. е. такие показатели, увеличение которых существенно зависит от организации труда и в конечном счете от заинтересованности человека, коллектива, организации, предприятия). Од-

нако параметр y может соответствовать таким показателям, уменьшение которых существенно определяется умелой организацией труда и заинтересованностью коллектива и которые, наоборот, могут быть «сознательно увеличены», если это выгодно элементу (продолжительность разработки, затраты материальных и денежных средств и т. д.). Такие параметры, очевидно, будут описываться семейством распределений

$$F_{\omega}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq \omega, \\ F(y), & \text{если } y > \omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

В дальнейшем мы ограничимся исследованием семейства распределений (1.1).

В случае детерминированных АЭ достоверная оценка параметров элемента определялась естественным образом. Для стохастических АЭ такое определение не годится, поскольку y — слу-

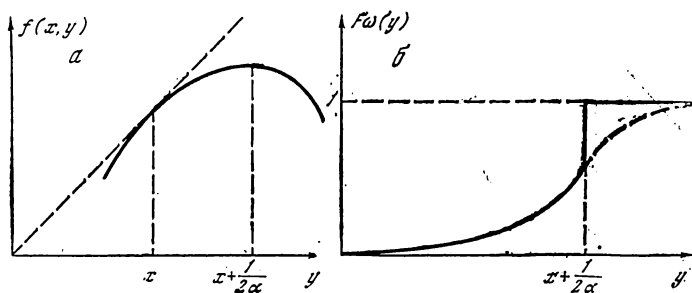


Рис. 6.1

чайная величина. Величину $1 - F(x)$ назовем *надежностью* оценки x . Пусть задана требуемая надежность q плана. *Достоверной оценкой* реализации y называется максимальная оценка, имеющая надежность не ниже требуемой q . План x , равный достоверной оценке, будем называть *напряженным планом*.

Будем предполагать в дальнейшем, если не оговорено особо, что $F(y)$ непрерывная и строго возрастающая функция y на $[0, \infty)$, причем $F(0) = 0$. Тогда достоверная оценка (соответственно напряженный план) определяется из уравнения

$$F(x) = 1 - q. \quad (1.3)$$

§ 2. Анализ адаптивного способа

Анализ адаптивного способа формирования данных проведем для закона стимулирования

$$f(x, y) = \begin{cases} y - \alpha(x - y), & \text{если } x \geq y, \\ y - \beta(y - x), & \text{если } x < y, \end{cases} \quad (2.1)$$

где α, β — постоянные коэффициенты, причем $\alpha > 0$.

Коэффициент α определяет «штраф» за невыполнение плана, а β — за перевыполнение (случай $\beta < 0$ соответствует «премии»).

На рис. 6.2 приведены графики функции $f(x, y)$ при различных значениях α, β . В дальнейшем (если не оговорено особо) будем считать, что закон стимулирования $f(x, y)$ и функция распределения $F(y)$ одни и те же для всех периодов функционирования.

Активность элементов при адаптивном способе формирования данных проявляется в способности устанавливать границу ω реализации y . Обозначим $\{\omega_k, k \geq 0\}$ последовательность границ, где ω_k — граница в периоде $k, k=0$ рассматриваемый период функционирования. Заметим, что в периоде $k=0$ АЭ не знает бу-

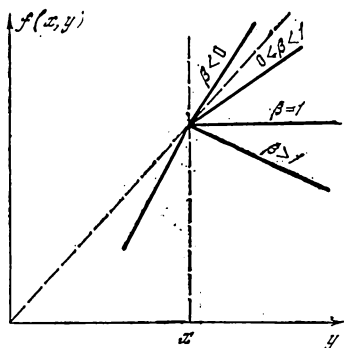


Рис. 6.2

дущих реализаций $y_k (k > 0)$. Поэтому в качестве оценок целевых функций в будущие периоды функционирования возьмем математические ожидания соответствующих величин (не забывайте, что функция распределения реализации y в периоде $k > 0$ имеет вид $F_{\omega_k}(y)$). Что касается рассматриваемого периода $k=0$, то здесь ситуация несколько другая. Дело в том, что решение об ограничении реализации $y_0 \leq \omega_0$ АЭ принимает в тот момент, когда граница ω_0 уже достигнута. Вопрос, решаемый АЭ при выборе границы, можно сформулировать так: если $y = \omega_0$, то стоит ли далее увеличивать реализацию? Поэтому целевая функция в рассматриваемом периоде при принятии решения о величине ω_0 имеет вид $f(x_0, \omega_0)$, а критерий эффективности с учетом будущих периодов

$$\eta(x, \omega) = f(x_0, \omega_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \int_0^{\infty} f(x_k, y) dF_{\omega_k}(y). \quad (2.2)$$

Для того чтобы выписать в явном виде критерий эффективности (2.2), определим математическое ожидание $\tilde{\eta}(x, \omega)$ функции $f(x, y)$ при заданной границе ω . Возможны два случая: а) граница не меньше плана, б) граница не больше плана. Если

граница ω не меньше плана, то

$$\tilde{\eta}(x, \omega) = (1 - \beta) \left[\omega - \int_0^{\omega} F(y) dy \right] - (\alpha + \beta) \int_0^x F(y) dy + \beta x. \quad (2.3)$$

Если граница ω не больше плана x , то

$$\eta(x, \omega) = (1 + \alpha) \left[\omega - \int_0^{\omega} F(y) dy \right] - \alpha x. \quad (2.4)$$

При $\omega = x$ оба выражения (2.3) и (2.4) совпадают

$$\eta(x, x) = x - (1 + \alpha) \int_0^x F(y) dy. \quad (2.5)$$

Заметим, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\omega - \int_0^{\omega} F(y) dy \right] = \mu,$$

где $\mu = \int_0^{\infty} y dF(y)$ — математическое ожидание величины y .

Будем рассматривать случай, когда оценка x_{k+1} зависит только от плана x_k и реализации y_k , т. е.

$$x_{k+1} = \tilde{\Psi}(x_k, y_k). \quad (2.6)$$

Задачей активного элемента является определение ω_0 , обеспечивающее максимальное значение целевой функции (2.2) при начальном плане x_0 и законе изменения плана (2.6). Ограничимся анализом законов (2.6), обладающих следующими свойствами:

- а) $\tilde{\Psi}(x, y)$ — монотонно возрастающая функция y , причем $\tilde{\Psi}(x, x) = x$,
- б) $\tilde{\Psi}(x, y)$ — выпуклая вниз функция y ,
- в) $\tilde{\Psi}(x, y) \geq x$.

Для того чтобы условие (в) выполнялось, определим закон (2.6) в виде

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k, & \text{если } y_k \leq x_k, \\ \Psi(x_k, y_k), & \text{если } y_k > x_k, \end{cases} \quad (2.7)$$

где функция $\Psi(x, y)$ уже не обязана удовлетворять условию (в), но удовлетворяет условиям (а) и (б). Из (2.7) и (2.4) следует, что граница ω_k всегда не меньше x_k . Аналогично $x_{k+1} \geq x_k$, так как $\Psi(x, y)$ — возрастающая функция y при $y \geq x$.

Л е м м а. Пусть $\xi(z)$ — выпуклая вниз, монотонно возрастающая функция z , $\xi(1) = 1$. Тогда функция $\Psi(x, y) = x\xi(y/x)$ удовлетворяет условиям (а), (б). Доказательство очевидно.

В дальнейшем будем рассматривать закон (2.7), где $\Psi(x_k, y_k) = x_k \xi(y_k/x_k)$ и $\xi(z)$ удовлетворяют условиям леммы. Разрешив уравнение $x_{k+1} = x_k \xi(\omega_k/x_k)$ относительно ω_k , получим

$$\omega_k = x_k \xi(x_{k+1}/x_k),$$

где ξ — функция, обратная ξ .

Назовем простой последовательность $\{\omega_i\}$, такую, что $\omega_i = u = \Psi(x_0, \omega_0)$ для всех $i \geq 1$. Для простой последовательности целевую функцию $\eta(x, \omega)$ можно в случае $u \geq x_0$ записать в явном виде как функцию только x_0 и $u = \Psi(x_0, \omega_0)$

$$\eta(x_0, u) = (1 - \beta) x_0 \xi\left(\frac{u}{x_0}\right) + \beta x_0 + N \left[u - (1 + \alpha) \int_0^u F(x) dx \right].$$

Так как $\xi(u/x_0)$ выпуклая вверх функция u и $\left[u - (1 + \alpha) \int_0^u F(x) dx \right]$ — выпуклая вверх функция u , то $\eta(x_0, u)$ — выпуклая вверх функция u .

Определим производную (предполагая ξ непрерывно дифференцируемой функцией)

$$\frac{\partial}{\partial u} \eta(x_0, u) = (1 - \beta) \xi'_z\left(\frac{u}{x_0}\right) + N [1 - (1 + \alpha) F(u)].$$

Обозначим

$$\kappa(\tilde{z}) = \frac{1}{1 + \alpha} \left[\frac{1 - \beta}{N} \xi'(\tilde{z}) + 1 \right].$$

В силу выпуклости вверх $\eta(x_0, u)$ по u , оптимальное значение u для простой последовательности определяется из следующих соотношений:

если $F(x_0) \geq \kappa(1)$, то $u = x_0$,

если $\lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} \kappa(\tilde{z}) \geq 1$, то $u = +\infty$,

если $\kappa(1) > F(x_0)$ и $\lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} \kappa(\tilde{z}) < 1$, то u определяется из урав-

нения

$$F(u) = \kappa(u/x_0). \quad (2.8)$$

Обозначим $u_{\text{гр}}$ решение уравнения

$$F(u) = \kappa(1), \text{ если } \kappa(1) < 1.$$

Так как $\kappa(u/x_0)$ возрастающая функция x_0 и убывающая функция u при $\beta < 1$, то решение уравнения (2.8) $u(x_0)$ — возрастающая функция x_0 . Учитывая также, что при $x_0 \geq u_{\text{гр}}$, $u(x_0) = x_0$, то для любого $x_0 < u_{\text{гр}}$ справедливо $u(x_0) > x_0$. Если теперь активный элемент будет придерживаться правила выбора границы $\omega_k = x_k \xi(u(x_k)/x_k)$ при $x_k < u_{\text{гр}}$, то последовательность планов $\{x_k\}$

сходится по вероятности к $u_{\text{гр}}$. Ясно, что решающее правило $\omega_k = x_k \xi(u(x_k)/x_k)$ не является в общем случае оптимальным.

Теорема 6.1. Если $x_0 \geq u_{\text{гр}}$, то правило $\omega_k = x_0$ является оптимальным.

Доказательство. Заметим, во-первых, что если, начиная с некоторого $s: \omega_i = \text{const} (i \geq s)$, то оптимальные значения $\omega_i = x_0$ для всех i . Это следует из того факта, что любая часть $\{\omega_i, i \geq k\}$ оптимальной последовательности также является оптимальной. Так как последовательность $\{\omega_i, i \geq s-1\}$ является простой, если $\omega_i = \text{const}$ для всех $i \geq s$, то для нее $\omega_i = x_{s-1}$ для всех $i \geq s-1$, поскольку $x_{s-1} \geq x_0 \geq u_{\text{гр}}$. Но тогда и последовательность $\{\omega_i, i \geq s-2\}$ является простой и, значит, $\omega_i = x_{s-2}$ для всех $i \geq s-2$. Продолжая таким образом, получим, что $\omega_i = x_0$ для всех i . Рассмотрим разность между величиной $\tilde{\eta}(x_k, \omega_k)$ для оптимального правила и величиной, соответствующей составляющей $x_0 - (1-\alpha) \int_0^{x_0} F(x) dx$ простой последовательности. Эта разность не пре-

вышает по модулю некоторой величины Δ . Тогда величина целевой функции в простой последовательности $\omega_i = x_0$ для всех i отличается от величины целевой функции для оптимального правила не более, чем на

$$\frac{\delta^s}{1-\delta} \Delta \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

Следовательно, решающее правило $\omega_0 = x_0 (\omega_k = x_k)$ является оптимальным.

Последовательность планов $\{x_k\}$ является неубывающей случайной последовательностью. Поскольку любой план $x_0 < u_{\text{гр}}$ является неустойчивым в том смысле, что граница $\omega_0 > x_0$ (если бы $\omega_0 = x_0$, то $\omega_i = x_0$ было бы оптимальным правилом, что неверно), то последовательность $\{x_k\}$ такая, что $x_0 < u_{\text{гр}}$ сходится по вероятности к плану $u_{\text{гр}}$, который является наименьшим устойчивым планом. Заметим, что из всех устойчивых планов $x_0 \geq u_{\text{гр}}$ план $u_{\text{гр}}$

«самый выгодный», так как $x_0 - (1+\alpha) \int_0^{x_0} F(x) dx$ убывающая функция x_0 при $x_0 \geq u_{\text{гр}}$.

«Разумной» стратегией (решающим правилом) активного элемента при переходе к плану $u_{\text{гр}}$ является также выбор границы $\omega_k = x_k \xi(u_{\text{гр}}/x_k)$. Такой выбор гарантирует, что план $x_k \leq u_{\text{гр}}$ и обеспечивает вероятностную сходимость $x_k \rightarrow u_{\text{гр}}$.

Пример 1. Пусть $\tilde{z} = \xi(z) = z^2$, тогда $\xi(\tilde{z}) = \sqrt{\tilde{z}}$, $\xi'(\tilde{z}) = 1/2 \sqrt{\tilde{z}}$,

$$\kappa(\tilde{z}) = \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1-\beta}{2N} \sqrt{\frac{x_0}{u}} + 1 \right], \quad F(u_{\text{гр}}) = \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1-\beta}{2N} + 1 \right], \text{ если } 2\alpha N >$$

$> 1 - \beta$; в противном случае $u_{\text{гр}} = +\infty$.

Пример 2.

Пусть $\xi(z) = \sqrt{c + (1-c)z^2}$, $0 < c < 1$

$$\xi(\tilde{z}) = \sqrt{\frac{\tilde{z}^2 - c}{1-c}}, \quad \xi'(\tilde{z}) = \frac{\tilde{z}}{\sqrt{(\tilde{z}^2 - c)(1-c)}}.$$

План $u_{\text{гр}}$ определяется из уравнения

$$F(u_{\text{гр}}) = \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1-\beta}{N(1-c)} + 1 \right],$$

если $\alpha N(1-c) > 1-\beta$.

Пример 3. Пусть $\xi(z) = c + (1-c)z$, $0 \leq c < 1$,

$$\xi(\tilde{z}) = \frac{\tilde{z} - c}{1-c}, \quad \xi'(\tilde{z}) = \frac{1}{1-c}.$$

Уравнение для определения $u_{\text{гр}}$ такое же, как в примере 2.

Пример 3 заслуживает более подробного анализа. В этом случае $\xi'(\tilde{z})$ не зависит от $\tilde{z}$ и поэтому $u(x_0) = u_{\text{гр}}$ при любом x_0 .

Упражнение 2.1. Покажите, что при $\xi(z) = c + (1-c)z$, $0 \leq c < 1$, правило

$$\omega_k = x_k \xi \left(\frac{u_{\text{гр}}}{x_k} \right) = \frac{u_{\text{гр}} - cx_k}{1-c}, \quad (u_{\text{гр}} \geq x_k)$$

является оптимальным.

В случае $\beta = 1$ независимо от вида функции $\xi(z)$ план $u_{\text{гр}}$ определяется из уравнения

$$F(u_{\text{гр}}) = \frac{1}{1+\alpha}, \quad (2.9)$$

причем «разумная» стратегия активного элемента $\omega_k = x_k \xi \left(\frac{u_{\text{гр}}}{x_k} \right)$

также является оптимальной (докажите самостоятельно).

Проведем анализ другого способа учета будущего

$$f(x_0, \omega_0) + \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} f(x_k, y) dF_{\omega_k}(y), \quad (2.10)$$

ограничиваясь случаем линейной функции $\xi(z) = c + (1-c)z$, $0 \leq c < 1$. Требуется определить решающее правило $\omega_0(x_0)$, обеспечивающее максимальное значение целевой функции (2.10). Если $\beta \leq 1$, то $\omega_N = \infty$, так как N — последний период, учитываемый активным элементом. Предположим сначала, что план x_0 достаточно мал. Границу ω_{N-1} активный элемент устанавливает в $(N-1)$ -й период, решая задачу максимизации выражения

$$\omega_{N-1}(1-\beta) + \beta x_{N-1} + (1-\beta)\mu + \beta x_N - (\alpha + \beta) \int_0^{x_N} F(x) dx,$$

где $x_N = cx_{N-1} + (1-c)\omega_{N-1}$. Максимум этого выражения достигается при $\omega_{N-1} = \frac{x_N^* - cx_{N-1}}{1-c}$, где x_N^* удовлетворяет уравнению

$$F(x_N^*) = \frac{1 - \beta c}{(\alpha + \beta)(1 - c)}. \quad (2.11)$$

Предположим, что $\alpha + \beta > 1 + \alpha c$, так как в противном случае $\omega_{N-1} = \infty$.

Таким образом, мы получили оптимальное решающее правило $\omega_{N-1}(x_{N-1})$. Оптимальное решающее правило $\omega_{N-2}(x_{N-2})$ уже не удастся выписать в аналитическом виде. Мы получим приближенное решающее правило, предполагая, что $y_{N-1} = \omega_{N-1}$ и, следовательно, $x_N = x_N^*$. В этом случае границу ω_{N-2} активный элемент определяет из условия максимума выражения

$$(1 - \beta)\omega_{N-2} + \beta x_{N-2} + (1 - \beta) \left[\omega_{N-1} - \int_0^{\omega_{N-1}} F(x) dx \right] + \beta x_{N-1} - \\ - (\alpha + \beta) \int_0^{x_{N-1}} F(x) dx + (1 - \beta) \mu + \beta x_N - (\alpha + \beta) \int_0^{x_N} F(x) dx, \quad (2.12)$$

где величина x_N^* уже определена, граница $\omega_{N-1} = \frac{x_N^* - cx_{N-1}}{1-c}$, а

$$\omega_{N-2} = \frac{x_{N-1} - cx_{N-2}}{1-c}.$$

Максимум выражения (2.12) достигается при $\omega_{N-2} = \frac{x_{N-1}^* - cx_{N-2}}{1-c}$,

где x_{N-1}^* определяется из уравнения

$$(\alpha + \beta) F(x_{N-1}^*) - \frac{(1 - \beta)c}{1 - c} F\left(\frac{x_N^* - cx_{N-1}^*}{1 - c}\right) = 1.$$

Отметим, что x_{N-1}^* не зависит от x_{N-2} . Повторяя вывод, получим аналогичное уравнение для определения плана x_{N-2}^* в зависимости от плана x_{N-1}^* и т. д. Обозначим $x = \sigma(x')$ величину плана x в периоде k , если план в период $(k+1)$ равен x' . В неявной форме зависимость $\sigma(x')$ задается уравнением

$$(\alpha + \beta) F(x) - \frac{(1 - \beta)c}{1 - c} F\left(\frac{x' - cx}{1 - c}\right) = 1. \quad (2.13)$$

Анализ (2.13) показывает, что $\sigma(x')$ — возрастающая функция

x' . Обозначим x^* решение уравнения

$$F(x) = \frac{1-c}{\alpha + \beta - \alpha c - c}. \quad (2.14)$$

Заметим, что $x^* \leq x_N$, так как

$$\frac{1-c}{\alpha + \beta - \alpha c - c} < \frac{1-\beta c}{(\alpha + \beta)(1-c)} \quad \text{при } \alpha + \beta > 1 + \alpha c.$$

Докажем, что $\sigma(x') \leq x'$, если $x' \geq x^*$. Предположим обратное, что $x = \sigma(x') > x'$ при $x' \geq x^*$. Заменим в (2.13) x на x' . Тогда в силу того, что левая часть (2.13) возрастающая функция x , имеем

$$\left[(\alpha + \beta) - \frac{(1-\beta)c}{1-c} \right] F(x') < 1$$

и, значит, $x' < x^*$, что противоречит условию $x' \geq x^*$.

Таким образом, последовательно применяя преобразование $\sigma(x')$, получаем $x_N^* = \lim_{x' \rightarrow \infty} \sigma(x')$, $x_{N-1}^* = \sigma(x_N^*) \dots x_1^* = \sigma(x_2^*)$. Если $x_1^* \geq x_0$, то решающее правило $\omega_0^* = (x_1^* - cx_0)/(1-c)$, а если $x_1^* < x_0$, то решающее правило $\omega_0 = x_0$ дают приближенное решение задачи.

Пример. Пусть $F(y)$ равномерно распределенная на отрезке $[0, 10]$ случайная величина

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0 \\ 0,1y, & \text{если } 0 < y < 10, \\ 1, & \text{если } y \geq 10. \end{cases} \quad (2.15)$$

Примем $\alpha = 2$, $\beta = 0,5$, $c = 0,5$.

Из уравнения (2.11) получаем $F(x_N^*) = 0,6$ и, следовательно, $x_N^* = 6$. Уравнение (2.13) принимает вид

$$2,5x - (x' - 0,5x) = 10$$

или $x = \frac{1}{3}(10 + x')$ для $5 \leq x' \leq 6$.

Решение уравнения (2.14): $x^* = 5$.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} x_N^* &= 6, \quad x_{N-1}^* = 5 \frac{1}{3}, \quad x_{N-2}^* = 5 \frac{1}{9}, \quad x_{N-3}^* = 5 \frac{1}{27}, \dots x_1^* = \\ &= 5 + \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}, \quad N \geq 1. \end{aligned}$$

Если начальный план $x^* \leq x_0 \leq x_N^*$, то в любой период k имеет место $x^* \leq x_k \leq x_N^*$ и, следовательно, для надежности любого плана справедливы оценки

$$\frac{1-c}{\alpha + \beta - \alpha c - c} \leq F(x_k) \leq \frac{1-\beta c}{(\alpha + \beta)(1-c)}. \quad (2.16)$$

Если $x_0 < x^*$, то вероятность надежности плана x_k попасть в интервал (2.16) стремится к 1 с ростом номера периода. Интересно отметить, что при $\beta=1$ обе оценки совпадают и равны $\frac{1}{1+\alpha}$. При этом $x^* = x_N^*$ и, следовательно, $x_k^* = x^*$ для любого $k \geq 1$. Оптимальное правило $\omega_0^* = \frac{x^* - cx_0}{1-c}$ для любого N , $x_0 \leq x^*$.

У п р а ж н е н и е 2.2. Проведите исследование закона изменения плана

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} (1 + \Delta)x, & \text{если } y \leq (1 + \Delta)x, \\ (1 + \Delta)x \xi\left(\frac{y}{(1 + \Delta)x}\right), & \text{если } y > (1 + \Delta)x, \Delta > 0. \end{cases}$$

§ 3. Анализ встречного способа формирования данных

Сначала рассмотрим встречный способ формирования данных для законов стимулирования вида (2.1). Математическое ожидание $\bar{f}(x, y)$ является целевой функцией активного элемента на этапе формирования данных, поскольку при встречном способе оценка состояния, сообщаемая в рассматриваемом периоде, не влияет на величину целевой функции следующих периодов. Этот факт является важным достоинством встречного способа формирования данных.

Пусть коэффициент β в законе стимулирования меньше 1. Тогда $\bar{f}(x, y)$ — возрастающая функция y и поэтому граница $\omega = \infty$. Из (2.3) непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\eta}(x, \omega) &= (1 - \beta)\mu + \beta x - (\alpha + \beta) \int_0^x F(y) dy, \quad \frac{d\eta}{dx} = \\ &= \beta - (\alpha + \beta)F(x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Так как $F(x)$ — возрастающая функция, то $\eta(x)$ — выпуклая вверх функция x . Поэтому оптимальная оценка x определяется следующими соотношениями:

если $\beta \leq 0$, то $F(x) = 0$, т. е. оценка x равна минимальному значению состояния y ;

если $\alpha = 0$, то $F(x) = 1$, т. е. оценка x равна максимальному состоянию y ;

если, $\alpha, \beta > 0$, то оценка x определяется из уравнения

$$F(x) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\beta}}. \quad (3.2)$$

Таким образом, при $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ можно обеспечить любую

надежность оценки путем соответствующего выбора отношения α/β , а значит, и достоверность этой оценки, если положить

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{q}{1-q} \quad (3.3)$$

(q — заданная надежность оценки).

Если $\beta \geq 1$, то функция $f(x, y)$ принимает в т. $y=x$ максимальное значение. Поэтому граница $\omega=x$ (при $\beta=1$ активный элемент может установить любую границу $\omega \geq x$). Функция $\tilde{\eta}(x, \omega)$, согласно (2.5), достигает максимума в x , определяемой из уравнения

$$F(x) = \frac{1}{1+\alpha}. \quad (3.4)$$

Достоверность оценки также обеспечивается выбором $\alpha = \frac{q}{1-q}$.

З а м е ч а н и е. Можно рассматривать АЭ, который, устанавливая границу ω для состояния y в рассматриваемом периоде, учитывает разность $\Delta=y-\omega$ в случае $y>\omega$ в следующем периоде. Функция распределения в следующем периоде будет иметь вид $F(x-\Delta)$. Для таких АЭ уравнение (3.2) в общем случае не будет справедливым. Действительно, при $y>x$ и $\omega=\infty$ доход активного элемента равен $y-\beta(y-x)$. Если же АЭ установит $\omega=x$, а разность $y-x$ учтет в оценке следующего периода, то его доход в рассматриваемом периоде с учетом части дохода следующего периода будет равен $x+\delta(y-x)$. Если $\delta < 1-\beta$, то АЭ целесообразно установить $\omega=\infty$ и уравнение (3.2) останется справедливым. Если же $\delta > 1-\beta$, то АЭ целесообразно установить границу $\omega=x$, и его целевая функция примет вид

$$x - (1+\alpha) \int_0^x F(x) dx + \delta \int_x^\infty (y-x) dF(x).$$

Оптимальная оценка в этом случае определится из уравнения

$$F(x) = \frac{1-\delta}{1-\delta+\alpha} = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{1-\delta}} < \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

и уже зависит от дальновидности активного элемента.

Проведем анализ встречного способа для более сложных, чем (2.1), законов стимулирования

$$f(x, y) = y - \xi(y-x),$$

где $\xi(z)$ — штраф за отклонение от плана. Будем предполагать $f(x, y)$ — неубывающей функцией y , что позволит положить границу $\omega=\infty$. Штраф $\xi(z)$ будем считать неотрицательной, выпуклой вниз функцией z , причем $\xi(0)=0$. Достаточно общим видом

функции штрафа является кусочно-линейная (рис. 6.3)

$$\xi(z) = \begin{cases} \xi(a_i) + \alpha_i(a_i - z), & \text{если } a_{i+1} \leq z \leq a_i, \quad i = 0 \div t, \\ \xi(b_i) + \beta_i(z - b_i), & \text{если } b_i \leq z \leq b_{i+1}, \quad i = 0 \div s, \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} -\infty &= a_{t+1} < a_t < \dots < a_2 < a_1 < a_0 = 0 = \\ &= b_0 < b_1 < \dots < b_s < b_{s+1} = \infty, \\ 1 &\geq \alpha_t > \alpha_{t-1} > \dots > \alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_s \leq 1. \end{aligned}$$

После несложных выкладок получаем следующее уравнение для определения оценки x , сообщаемой АЭ центру:

$$\sum_{i=0}^t (\alpha_i - \alpha_{i-1}) F(x + a_i) = \sum_{i=0}^s (\beta_i - \beta_{i-1}) V(x + b_i), \quad (3.6)$$

где $V(x) = 1 - F(x)$, $\alpha_{-1} = \beta_{-1} = 0$. В частности, при $t = s = 0$ и $\alpha_0, \beta_0 > 0$ получаем результат (3.2). Естественно предположить, что $s + \beta_0 > 0$ и $t + \alpha_0 > 0$ (в противном случае одна из частей уравнения (3.6) будет равна 0). При таком предположении урав-

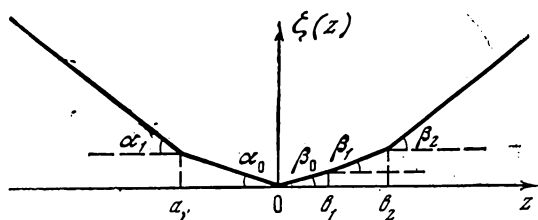


Рис. 6.3

нение (3.6) имеет единственное решение. Действительно, выражение, стоящее в левой части уравнения, является возрастающей, а в правой — убывающей функцией x . Кроме того, при $x = 0$ величина левой части равна 0, а правой положительна; при $x = \infty$, наоборот, величина правой части равна 0, а левой — положительна. Отсюда и следует единственность решения уравнения.

Пусть $F(x)$ — симметричное распределение, ($F(\mu - x) = V(\mu + x)$), а штраф $\xi(z)$ — симметричная функция ($\xi(-z) = \xi(z)$). Тогда решением уравнения (3.6) является $x = \mu$. Действительно, поскольку $\alpha_i = \beta_i$, $a_i = -b_i$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, $t = s$ в силу симметрии функции штрафа, то уравнение (3.6) запишется в виде

$$\sum_{i=0}^t (\alpha_i - \alpha_{i-1}) [F(x - b_i) - V(x + b_i)] = 0, \quad (3.7)$$

и в силу симметрии распределения выполняется при $x = \mu$.

При выводе уравнения (3.6) существенным является предположение о монотонности по y функции $f(x, y)$, что позволяет положить границу $\omega = \infty$. Если это условие нарушается, следует учитывать возможность установления границы $\omega < \infty$ (см. приведенный выше анализ случая $\beta > 1$ для функции (2.1)). Рассмотрим несколько примеров определения оценки в случае границы $\omega < \infty$.

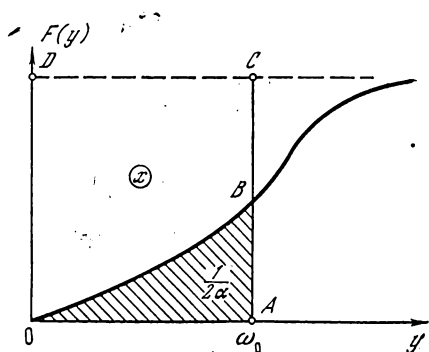


Рис. 6.4

Пример 1.

$$f(x, y) = y - \alpha(x - y)^2, \quad \alpha > 0. \quad (3.8)$$

Функция $f(x, y)$ достигает максимума по y в точке $2\alpha x + 1/2\alpha$ (рис. 6.1). Очевидно, что АЭ устанавливает границу $\omega = x + \frac{1}{2\alpha}$.

Математическое ожидание $\tilde{\eta}(x, \omega)$ целевой функции (3.8)

$$\tilde{\eta}(x, \omega) = \omega - \alpha(x - \omega)^2 - \int_0^{\omega} [1 + 2\alpha(x - y)] F(y) dy.$$

Максимум $\tilde{\eta}(x, \omega)$ по x достигается в точке $x = \omega - \frac{1}{2\alpha}$, где ω_0 определяется из уравнения

$$\int_0^{\omega_0} F(y) dy = \frac{1}{2\alpha}. \quad (3.9)$$

Заметим, что при $\alpha \rightarrow 0$, $\omega_0 \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x = \lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \left[\omega_0 - \int_0^{\omega_0} F(y) dy \right] = \mu.$$

Геометрически величина x равна площади фигуры ОВСД на рис. 6.4 при условии, что площадь фигуры ОАВ равна $1/2\alpha$.

Пример 2.

$$f(x, y) = \begin{cases} f(y) - \alpha(x - y), & \text{если } x \geq y, \\ f(y) - \beta(y - x), & \text{если } x \leq y, \end{cases}$$

где $f(y)$ — неубывающая выпуклая вверх функция y . Так как $f(x, y)$ при $y > x$ достигает максимума в y_m , определяемой из уравнения $f'(y) = \beta$, то $\omega = y_m$ или $\omega = x$. В отличие от предыдущего примера y_m не зависит от плана x . Поэтому если $F(y_m) \geq \beta/(\alpha + \beta)$, то x по-прежнему определяется из уравнения (3.2). Если же $F(y_m) < \beta/(\alpha + \beta)$, то $F(x) = f'(x)/\alpha + f'(x)$.

Полученные выше результаты для непрерывного случая легко обобщаются и на дискретный вариант. Пусть состояние актив-

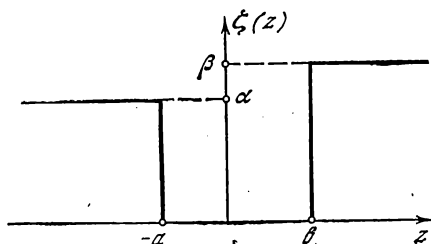


Рис. 6.5

ного элемента может принимать конечное число значений $y_1, y_2, \dots, y_r$, соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_r$. Обозначим $F_1 = 0, F_s = \sum_{i=1}^{s-1} p_i, (s > 1)$. Предполагая целевую функ-

цию $f(x, y)$ монотонной по y , выпишем ожидаемое значение штрафа

$$M_y [\xi(y - x)] = \sum_{k=1}^r \xi(y_k - x) p_k. \quad (3.10)$$

Для единственности минимума (3.10) достаточно строгой выпуклости вниз $\xi(z)$. Если $\xi(z)$ — кусочно-дифференцируемая функция, то x определяется из соотношений

$$\sum_k \xi^-(y_k - x) p_k \leq 0, \quad \sum_k \xi^+(y_k - x) p_k \geq 0, \quad (3.11)$$

где $\xi^-(\xi^+)$ — левая (правая) производные функции штрафа по x .

Если функция штрафа является кусочно-линейной и, следовательно, нестрогой выпуклой вниз, то возможны несколько значений x , обеспечивающих минимум ожидаемого штрафа. Рассмотрим, например, функцию (2.1) при $1 > \beta > 0, \alpha > 0$. Условия

(3.11) в случае $y_{s-1} < x < y_s$ ($2 \leq s \leq r$) примут вид

$$-\alpha F_s + \beta(1 - F_s) = 0 \quad (3.12)$$

или $F_s = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

Если существует такое s , что (3.12) выполняется, то любое $x \in [y_{s-1}, y_s]$ обеспечивает минимум (3.10). В противном случае оптимальная оценка $x_s = y_s$, т. ч.

$$F_{s+1} > \frac{\beta}{\alpha + \beta} > F_s. \quad (3.13)$$

Трудности, связанные с анализом поведения активного элемента в случае невыпуклой вниз по y функции штрафа рассмот-

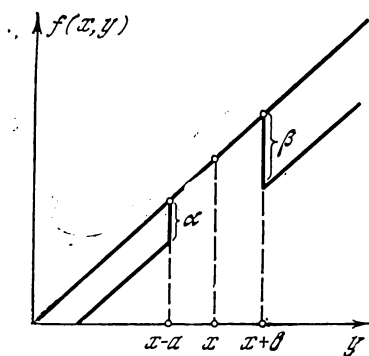


Рис. 6.6

рим на примере ступенчатой функции (рис. 6.5)

$$\xi(z) = \begin{cases} \alpha, & \text{если, } z < -a, \\ 0, & \text{если, } -a \leq z \leq b, \\ \beta, & \text{если, } z > b. \end{cases} \quad (3.14)$$

Как следует из графика целевой функции (рис. 6.6), АЭ целесообразно либо вообще не устанавливать границы ($\omega = \infty$), либо установить $\omega = x + b$.

Если $\omega = \infty$, то ожидаемый штраф равен

$$\alpha F(x-a) + \beta[1 - F(x+b)],$$

а если $\omega = x + b$, то

$$\alpha F(x-a) + \mu - \int_0^{x+b} V(y) dy.$$

В данном случае выписать простые условия оптимальности оценок x и тем более оценить их надежность достаточно сложно.

§ 4. Сравнительная оценка способов формирования данных

Как показывают результаты § 2, адаптивный способ в рассмотренном случае не обеспечивает достоверности оценки состояния, так как надежность «предельного» плана $u_{гр}$, как правило, зависит от степени дальновидности активного элемента. Исключение составляет случай $\beta=1$, при котором надежность плана $u_{гр}$ не зависит от степени дальновидности и равна $\alpha/1+\alpha$. Что касается встречного способа формирования данных, то в случае кусочно-линейного закона стимулирования при соответствующем выборе коэффициентов α, β удастся обеспечить достоверность сообщаемой оценки. Интересно отметить, что при $\beta=1$ достоверность оценки обеспечивается при одной и той же величине α для обоих способов. Разница заключается в том, что при адаптивном способе, во-первых, последовательность планов сходится по вероятности к плану $u_{гр}$, в то время как при встречном оценка плана сразу имеет требуемую надежность (конечно, если активному элементу известна функция распределения $F(y)$; в противном случае АЭ вынужден восстанавливать $F(y)$ на основе известных данных о состояниях в прошлые периоды, и сходимость к оптимальной оценке также обеспечивается только в вероятностном смысле). Во-вторых, при адаптивном способе напряженный план никогда не будет перевыполнен, в то время как при встречном это не исключено, если $\beta < 1$.

§ 5. Многомерный активный элемент

Закон стимулирования (2.1) для многомерного активного элемента

$$f(\lambda, x, y) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[y_j - \begin{pmatrix} \alpha_j \\ -\beta_j \end{pmatrix} (x_j - y_j) \right], \quad (5.1)$$

где $\alpha_j > 0$, $0 < \beta_j \leq 1$. Примем, что $x_j = \sigma_j \tau_j$, $y_j = z_j \tau_j$, где $\sum_{j=1}^m \tau_j = T$.

Такую модель содержательно можно интерпретировать следующим образом. Предположим, что предприятие может выпускать в каждый момент времени продукцию только одного вида. В этом случае τ_j определяет планируемую часть общего времени T работы предприятия по выпуску продукции вида j . Оценка σ_j соответствует планируемой производительности по j -му виду, а z_j — реальной. Соответственно $x_j = \sigma_j \tau_j$ — план предприятия по выпуску продукции вида j , а y_j — реальный выпуск. Наконец, λ_j — цена единицы продукции вида j , а α_j, β_j коэффициенты штрафной функции. $f(\lambda, x, y)$ определяет при этом объем реализации с учетом штрафов за отклонение плана от реального выпуска. Предположим, что предприятие не может изменять времена τ_j (это может быть связано, например, с необходимостью использования

определенного оборудования или скоропортящегося сырья, график поставок которого определен централизованно). Тогда $y_j = z_j \tau_j$ и математическое ожидание функции $f(\lambda, x, y)$

$$\eta(\lambda, x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \tau_j \int_0^{\infty} \left[z_j - \begin{pmatrix} \alpha_j \\ -\beta_j \end{pmatrix} (\sigma_j - z_j) \right] dF_j(z_j) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \tau_j h_j(\sigma_j),$$

где

$$h_j(\sigma_j) = (1 - \beta_j) \mu_j + \beta_j \sigma_j - (\alpha_j + \beta_j) \int_0^{\sigma_j} F_j(z) dz.$$

Максимум $h_j(\sigma_j)$ достигается при значении σ_j^* , удовлетворяющем уравнению

$$F_j(\sigma_j^*) = \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j}. \quad (5.2)$$

Обозначив $r_j = h_j(\sigma_j^*)$, получим $\eta(\lambda, x) = \sum_j \lambda_j \tau_j r_j$. Если при этом положить $\frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} = 1 - q$, то оценка σ_j^* будет достоверной.

Если предположение о невозможности для предприятия изменять время τ_j не имеет места, анализ его поведения на этапе формирования данных существенно усложняется. Действительно, пусть в момент $t < T$ план предприятия по j -му виду продукции еще не выполнен. Тогда, выпуская в интервале $(t, t+dt)$ продукцию вида j , предприятие получит ожидаемое приращение целевой функции $\lambda_j(1 + \alpha_j) \mu_j dt$. Если же к моменту t план по продукции вида j уже выполнен, то ожидаемое приращение равно $\lambda_j(1 - \beta_j) \mu_j dt$. Очевидно, что предприятие будет выпускать в момент t продукцию, обеспечивающую максимальное ожидаемое приращение целевой функции. Примем, что

$$\min_j \lambda_j(1 + \alpha_j) \mu_j > \max_j \lambda_j(1 - \beta_j) \mu_j.$$

В этом случае предприятие не будет выпускать сверхплановую продукцию до выполнения плановых заданий по всем видам продукции. Упорядочим виды продукции таким образом, что

$$\lambda_1(1 + \alpha_1) \mu_1 > \lambda_2(1 + \alpha_2) \mu_2 > \dots > \lambda_m(1 + \alpha_m) \mu_m$$

(для упрощения примем, что все числа $\lambda_j(1 + \alpha_j) \mu_j$ различны). Пусть, наконец, k — единственный вид продукции, такой, что

$$\lambda_k'(1 - \beta_k) \mu_k = \max_j \lambda_j(1 - \beta_j) \mu_j.$$

Тогда поведение предприятия на этапе реализации плана можно описать следующим образом. Виды продукции выпускаются в очередности их номеров, причем переход к выпуску следующего

вида происходит, как только выполнено плановое задание по предыдущему виду. Если выполнен план по всем видам продукции и осталось время до конца планового периода, выпускается продукция вида k . Для формального анализа примем, что предприятие планирует выпуск продукции в заданном отношении, т. е. $x_j = \delta_j x_1$, $j > 1$. Обозначим $u_j = 1/z_j$, $w = T/x_1$, $F_j(u_j)$ — функция распределения величины u_j (предполагаем, что $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u_m$ — независимые случайные величины). Ограничиваясь анализом случая $m=2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\delta_2 = \delta$, выпишем величину целевой функции предприятия при различных значениях z_1, z_2 ;

$$а) u_1 + \delta u_2 \leq w, \quad f(\lambda, w, u) = \frac{\lambda_1 + \delta \lambda_2}{w} T,$$

$$б) u_1 + \delta u_2 > w, \quad u_1 \leq w, \quad f(\lambda, w, u) = \frac{\lambda_1 - \alpha_2 \lambda_2 \delta}{w} T + \\ + \frac{\lambda_2 (1 + \alpha_2)}{u_2} \left(1 - \frac{u_1}{w}\right) T,$$

$$в) u_1 > w, \quad f(\lambda, w, u) = \left[\frac{\lambda_1 (1 + \alpha_1)}{u_1} - \frac{\alpha_1 \lambda_1}{w} - \frac{\alpha_2 \lambda_2 \delta}{w} \right] T.$$

Ожидаемое значение целевой функции

$$\eta(w) = \int_0^w dF_1(u_1) \int_0^{\frac{1}{\delta}(w-u_1)} \frac{\lambda_1 + \delta \lambda_2}{w} T dF_2(u_2) + \\ + \int_0^w dF_1(u_1) \int_{\frac{1}{\delta}(w-u_1)}^{\infty} \left[\frac{\lambda_1 - \alpha_2 \lambda_2 \delta}{w} T + \frac{\lambda_2 (1 + \alpha_2)}{u_2} \left(1 - \frac{u_1}{w}\right) T \right] \times \\ \times dF_2(u_2) + \int_w^{\infty} \left[\frac{\lambda_1 (1 + \alpha_1)}{u_1} - \frac{\alpha_1 \lambda_1}{w} - \frac{\alpha_2 \lambda_2 \delta}{w} \right] T dF_1(u_1). \quad (5.3)$$

Обозначим $w_0(\delta)$ значение w , обеспечивающее максимум (5.3).

Так как $x_1 = \frac{T}{w_0(\delta)}$, $x_2 = \frac{\delta T}{w_0(\delta)}$, $\frac{x_1}{\sigma_1} + \frac{x_2}{\sigma_2} = T$, то

$$\frac{1}{\sigma_1} + \frac{\delta}{\sigma_2} = w_0(\delta). \quad (5.4)$$

Таким образом, сообщение любых оценок σ_1, σ_2 , удовлетворяющих (5.4), обеспечивает максимум (5.3). Определение $w_0(\delta)$ аналитическим путем представляется достаточно трудной задачей, более целесообразно в данном случае использование метода Монте-Карло.

§ 6. Переоценка и прогноз

Оценка активным элементом состояния в текущем периоде становится все более точной по мере реализации плана. Поэтому целесообразно допускать переоценку и соответствующее изменение плана в определенные моменты времени. Определим функцию штрафа за переоценку $\xi_t(v_t - u_t)$, где u_t — план на момент t , v_t — новый план. Будем предполагать, что ξ_t — неубывающая функция $|v_t - u_t|$ и выпуклая вниз функция $z_t = v_t - u_t$, причем $\xi_t(0) = 0$. Примем сначала, что допустима только одна переоценка в определенный момент времени τ . Выпишем значение целевой функции в этот момент, учитывая, что $u_\tau = x$

$$\mu_\tau(1 - \beta) + \beta v_\tau - (\alpha + \beta) \int_0^{v_\tau} F_\tau(y) dy - \xi_\tau(v_\tau - x), \quad (6.1)$$

где $F_\tau(y)$ — функция распределения y в момент τ . Условия оптимальности новой оценки

$$\frac{\beta - \xi_\tau^+(v_\tau - x)}{\alpha + \beta} \leq F_\tau(v_\tau) \leq \frac{\beta - \xi_\tau^-(v_\tau - x)}{\alpha + \beta}, \quad (6.2)$$

где ξ_τ^+ , ξ_τ^- — соответственно правая и левая производные функции ξ_τ по z_τ . Пусть, например,

$$\xi_\tau(z_\tau) = \begin{cases} \gamma z_\tau \frac{\tau}{T}, & z_\tau \geq 0, \\ -\theta z_\tau \frac{\tau}{T}, & z_\tau < 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Тогда (6.2) принимает вид

$$\begin{aligned} F_\tau(v_\tau) &= \frac{\beta - \gamma \frac{\tau}{T}}{\alpha + \beta}, \quad \text{если} \quad F_\tau(x) < \frac{\beta - \gamma \frac{\tau}{T}}{\alpha + \beta}, \\ F_\tau(v_\tau) &= \frac{\beta + \theta \frac{\tau}{T}}{\alpha + \beta}, \quad \text{если} \quad F_\tau(x) > \frac{\beta + \theta \frac{\tau}{T}}{\alpha + \beta}, \\ v_\tau &= x, \quad \text{если} \quad \frac{\beta - \gamma \frac{\tau}{T}}{\alpha + \beta} \leq F_\tau(x) \leq \frac{\beta + \theta \frac{\tau}{T}}{\alpha + \beta}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Важно отметить, что допущение переоценок не влияет на оценку, выбираемую в начале периода. Действительно, в начале периода $F_\tau(y) = F(y)$ для любого τ , в частности, и для последнего возможного момента τ_s переоценки, определяющего план v_{τ_s} .

Целевая функция АЭ с учетом всех переоценок запишется в виде

$$\mu(1-\beta) + \beta v_{\tau_s} - (\alpha + \beta) \int_0^{v_{\tau_s}} F(y) dy - \sum_{k=1}^s \xi_{\tau_k} (v_{\tau_k} - v_{\tau_{k-1}}), \quad (6.5)$$

где $v_{\tau_0} = x$. Легко убедиться, что это выражение достигает максимума при $v_{\tau_k} = x$ для всех k , где x определяется из уравнения $F(x) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$, что эквивалентно отсутствию переоценок.

Переходя к рассмотрению случая нескольких переоценок $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$, заметим, что для кусочно-линейной функции штрафа (6.3) решение о величине изменения оценки в любой момент времени принимается на основе соотношений (6.4), как если бы мы имели дело с единственной переоценкой. Этот факт легко получить, анализируя выражение (6.5). При анализе произвольных выпуклых вниз функций штрафа следует уже учитывать возможность изменения оценок в будущие моменты.

Предполагая для простоты функции $\xi_\tau(z_\tau)$ непрерывно дифференцируемыми (обобщение на случай произвольных выпуклых вниз функций элементарно), выпишем необходимые и достаточные условия максимума выражения (6.5)

$$\frac{\partial}{\partial v_{\tau_k}} [\xi_{\tau_k} (v_{\tau_k} - v_{\tau_{k-1}})] = - \frac{\partial}{\partial v_{\tau_k}} [\xi_{\tau_{k+1}} (v_{\tau_{k+1}} - v_{\tau_k})], \quad k = 1 \div s-1, \quad (6.6)$$

$$\beta - (\alpha + \beta) F_{\tau_1} (v_{\tau_s}) - \frac{\partial}{\partial v_{\tau_s}} \xi_{\tau_s} (v_{\tau_s} - v_{\tau_{s-1}}) = 0. \quad (6.7)$$

Обозначая v_{τ_1} через v , из условий (6.6) последовательно выражаем v_{τ_k} через x и v . Подставляя затем $v_{\tau_s}(x, v)$ в (6.7), определяем оптимальное значение новой оценки v в зависимости от x .

Пример. Пусть $\xi_\tau(z) = \gamma z^2 \tau / T$.

Из условий (6.6) находим

$$v_{\tau_k} = v + \sum_{q=2}^k \frac{\tau_1}{\tau_q} (v - x), \quad k \geq 1.$$

Подставляя в (6.7), получаем

$$F_{\tau_1} \left[v + \sum_{k=2}^s \frac{\tau_1}{\tau_k} (v - x) \right] = \frac{\beta - 2\gamma (v - x) \frac{\tau_1}{T_s}}{\alpha + \beta}.$$

Распределение изменения оценки на ряд моментов времени является недостатком строго выпуклых вниз функций штрафа. Поэтому целесообразно использовать кусочно-линейные зависимости вида (6.3).

Аналогично можно рассмотреть задачу прогнозирования состояния в будущие периоды функционирования и уточнения прогноза по мере накопления информации (предоставляем проделать это в качестве упражнения).

§ 7. Проблема синтеза законов стимулирования

Рассмотрим систему из n простых АЭ. Пусть $\Phi(y) - S(y - x)$ — целевая функция системы, где составляющая $S(y - x)$ определяет потери от несоответствия плана и реализации. Задача центра заключается в обеспечении максимума ожидаемого значения $M_y[\Phi(y) - S(y - x)]$. Эту задачу Ц не может решить сам по двум причинам. Во-первых, Ц не знает функций распределения состояния активных элементов и, следовательно, не может определить ожидаемое значение целевой функции. Во-вторых, в рассматриваемой нами схеме функционирования он не определяет план, а просто утверждает полученные от активных элементов оценки состояний. АЭ сообщая могли бы решить задачу выбора оптимального для всей системы плана. Однако они действуют независимо друг от друга, сообщая оценки состояния, обеспечивающие максимум функции $\sum_i \gamma_i M_{y_i}[f_i(x_i, y_i)] =$

$= M_y \left[\sum_i \gamma_i f_i(x_i, y_i) \right]$, где $\gamma_i > 0$ для всех i . Если бы функция

$\sum_i \gamma_i f_i(x_i, y_i)$ была «близка» к $\Phi(y) - S(y - x)$ в области возмож-

ных значений x и y , то план x обеспечивал бы ожидаемое значение целевой функции системы, близкое к максимальному. Эти рассуждения позволяют поставить проблему синтеза целевых функций как проблему оптимального приближения целевой функции системы с помощью функций $f_i(x_i, y_i)$. Ограничимся рассмотрением целевой функции $\Phi(y) - S(y - x)$, неубывающей по y , с функцией потерь $S(z)$, выпуклой вниз по $z = y - x$; причем $S(0) = 0$. Будем искать законы стимулирования $f_i(x_i, y_i)$ в виде $\xi_{i1}(y_i) - \xi_{i2}(y_i - x_i)$, неубывающих по y_i , с функциями штрафа $\xi_{i2}(z_i)$, выпуклыми вниз по $z_i = y_i - x_i$ и $\xi_{i2}(0) = 0$. В этом случае достаточно определить оптимальное приближение $S(z)$ с помощью $\xi_{i2}(z_i)$. Итак, мы пришли к задаче оптимального представления выпуклой вниз функции $S(z)$ в виде $\sum_i \gamma_i \xi_{i2}(z_i)$, где $\gamma_i > 0$,

$\xi_{i2}(z_i)$ — выпуклые вниз функции z_i . Отметим, что величина $\gamma_i > 0$ не влияет на сообщаемые активными элементами оценки x_i .

Рассмотрим несколько случаев приближенного решения проблемы синтеза.

а) Пусть $S(z) = \sum_i s_i(z_i)$. В этом случае $\xi_{i2}(z_i) = \gamma_i s_i(z_i)$.

б) Пусть вероятность больших отклонений z мала. Тогда с достаточной точностью $S(z)$ можно представить в виде $\sum_i s_i(z_i)$, где

$$s_i(z_i) = \begin{cases} \frac{\partial S^+(0)}{\partial z_i} z_i, & \text{если } z_i \geq 0, \\ \frac{\partial S^-(0)}{\partial z_i} z_i, & \text{если } z_i < 0. \end{cases}$$

Получаем случай а) и, следовательно, $\xi_i(z_i) = \gamma_i s_i(z_i)$. Заметим, что в данном случае решением проблемы синтеза являются кусочно-линейные функции штрафа с коэффициентами $\beta_i = \partial S^+(0) / \partial z_i$, $\alpha_i = -\partial S^-(0) / \partial z_i$.

в) Пусть мала вероятность больших значений z_i для более чем одного активного элемента. Тогда хорошее приближение обеспечивает функция $\sum_i \xi_i(z_i) = \sum_i \gamma_i s_i(z_i)$, где $s_i(z_i) = S(0, 0, \dots, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)$.

г) Поскольку величина коэффициентов γ_i не влияет на оценку x_i , то при ограниченной области изменения z можно искать приближение функции $S(z)$ в классе функций таких, что $\sum_i \xi_i(z_i) \geq S(z)$. В этом случае сумма ожидаемых штрафов активных элементов дает оценку сверху ожидаемого штрафа системы. Возможным вариантом для выпуклых вниз функций $S(z)$ является $\sum_i \xi_i(z_i) = \frac{1}{n} \sum_i s_i(nz_i)$, где $s_i(nz_i)$ определяется аналогично случаю в). Действительно, обозначим z^j точку такую, что $z_i^j = z_i$, $z_i^j = 0$ для всех $i \neq j$. Тогда

$$S(z) = S\left(\sum_j \frac{1}{n} (nz^j)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_j S(nz^j) = \frac{1}{n} \sum_j s_j(nz_j).$$

Пример 1.

$$S(z) = \begin{cases} \beta \left(\sum_i z_i\right), & \text{если } \sum_i z_i \geq 0, \\ -\alpha \left(\sum_i z_i\right), & \text{если } \sum_i z_i < 0, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta > 0$.

Если имеет случай б), то

$$\xi_i(z_i) = \begin{cases} \gamma_i \beta z_i, & \text{если } z_i \geq 0, \\ -\gamma_i \alpha z_i, & \text{если } z_i < 0. \end{cases}$$

Как легко убедиться, такой же вид функции штрафа имеют и для случаев в) и г).

Пример 2.

$$S(z) = \Theta \left(\sum_i z_i \right)^2, \quad \text{где } \Theta > 0.$$

Малые отклонения для рассматриваемой функции потерь нечувствительны для системы, поэтому функции штрафа следует определять с расчетом на большие отклонения. Если имеет место случай в), то $\xi_i(z_i) = \gamma_i z_i^2$, где $\gamma_i > 0$. Для случая г) справедливо

$$\xi_i(z_i) = \gamma_i \frac{1}{n} (nz_i)^2 = \gamma_i n z_i^2.$$

Учитывая, что положительный множитель не играет роли, мы получаем в обоих случаях один и тот же вид функции штрафа $\xi_i(z_i) = \gamma_i z_i^2$.

Заметим, что при функции потерь системы вида $\Theta \left(\sum_i z_i \right)^2$ минимум ожидаемых потерь обеспечивается при плане $x = \sum_i x_i = \mu$, где μ — среднее значение величины $\sum_i y_i$. При функции штрафа $\gamma_i z_i^2$ и неубывающей по y целевой функции АЭ сообщает $x_i = \mu_i$. Для суммы независимых случайных величин имеет место $\mu = \sum_i \mu_i$. Таким образом, в данном случае функции штрафа $\gamma_i z_i^2$ дают оптимальное решение проблемы синтеза законов стимулирования.

Раздел II

ДВУХУРОВНЕВЫЕ АКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

В этом разделе мы дадим строгое и последовательное изложение теории двухуровневых активных систем. Это наиболее разработанная в настоящее время область теории активных систем. Кроме того, как показано в гл. V, задачи управления многоуровневыми, динамическими или стохастическими активными системами часто удается свести к исследованию двухуровневых моделей.

Глава VII

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Структурные элементы двухуровневой активной системы

Структуру двухуровневой иерархической системы образуют центр, т. е. подсистема, осуществляющая управление в системе, n подчиненных центру подсистем (активные элементы), совокупность переменных, описывающих состояние элементов системы и

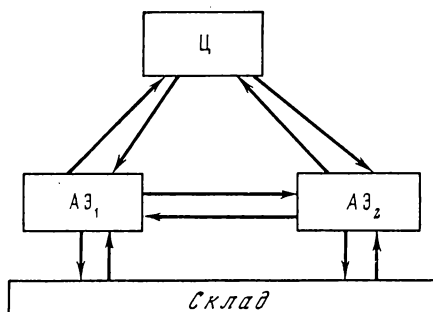


Рис. 7.1

связи между подсистемами, которые удобно задавать графом связей G . Вершины графа G соответствуют элементам системы. Дуги графа G могут отражать как материальные, так и информационные связи.

Для того чтобы учесть «внешние» связи элементов системы, введем структурный элемент «внешняя среда». К нему будем относить и некоторые «пассивные» элементы (например, централизованные склады). На рис. 7.1 изображена АС, состоящая из центра, централизованного склада и двух активных элементов.

§ 2. Описание активных элементов

Каждый АЭ имеет вход, выход и канал управления. Состояние такого объекта управления будем задавать вектором состояний на входе $y_i^{\text{вх}} = \{y_{ij}^{\text{вх}}, j = 1 \div p_i^{\text{вх}}\}$, вектором состояний на выходе $y_i^{\text{вых}} = \{y_{ij}^{\text{вых}}, j = 1 \div p_i^{\text{вых}}\}$ и вектором управления c_i , (рис. 7.2).

Полный вектор состояний i -го АЭ обозначим $y_i = (y_i^{\text{вх}}, y_i^{\text{вых}})$, $p_i^{\text{вх}} + p_i^{\text{вых}} = p_i$. Имея в виду экономическую интерпретацию, вектор состояний y_i удобно называть вектором реализации (или просто

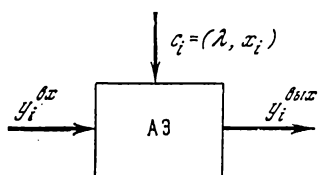


Рис. 7.2

реализацией i -го АЭ). Опишем теперь канал управления. В иерархических системах вектор управления c_i задается центром. Выбор компонент вектора управления осуществляется при формировании структуры иерархической системы и ориентирован на конкретный объект. Особо выделим компоненты вектора управления, определяющие «желательное» значение соответствующих компонент реализации и назовем их планируемой реализацией или *планом*. При этом для каждого АЭ может планироваться как вход (поставки ресурсов, например), так и выход (выпуск продукции, затраты на производство и т. п.). Вектор-план, устанавливаемый центром для i -го АЭ, будем обозначать $x_i = (x_i^{\text{вх}}, x_i^{\text{вых}})$. Размерность y_i в общем случае больше размерности плана x_i , т. е. y_i может планироваться полностью или частично. Сначала мы рассмотрим случай, когда размерности y_i и x_i совпадают для всех АЭ.

Наряду с планом центр устанавливает и ряд других параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$. Вектор λ будем называть просто «управлением». Как правило, его составляющие являются общими для всех или нескольких АЭ (например, цены, нормативы отчислений, коэффициенты штрафов и т. д.). Обозначим L множество допустимых управлений. АЭ имеет определенную свободу выбора реализации y_i из множества Y_i возможных реализаций. Множество Y_i определяется «внутренними» ограничениями элемента

(например, мощностью предприятия, его специализацией, технологией производства и т. д.).

Пример 1. В экономико-математической литературе имеется большое число моделей типа «затраги — выпуск», в которых множество возможных реализаций Y_i задается следующим образом: $y_i^{bx} \in Y_i^{bx}$, $y_i^{bvx} \in Y_i^{bvx}(y_i^{bx})$. К такому типу моделей относятся, например, рассмотренные в первом разделе задачи производства продукции и распределения ресурсов.

В иерархических системах свобода выбора реализации ограничена следующими обстоятельствами. Во-первых, установление центром плана может «сузить» множество реализаций (например, задание централизованных поставок сырья, естественно, ограничивает выпуск продукции предприятием). Во-вторых, ограничения на выбор реализации могут определяться другими АЭ (как правило, таким ограничениям соответствуют «горизонтальные связи» между элементами — поставки сырьевых продуктов, например). Прежде всего мы рассмотрим случай, когда АЭ независимы в том смысле, что множество возможных реализаций АЭ ограничивается только планом x_i (АС с независимыми активными элементами). Таким образом, i -й АЭ имеет возможность независимого выбора реализации y_i из некоторого множества $B_i(x_i)$ возможных реализаций при плане x_i (очевидно, что $B_i(x_i) \subset Y_i$). В более общем случае множество B_i может, конечно, зависеть и от управления λ . Рассматриваемые ниже постановки задач без труда обобщаются и на этот случай.

План i -го АЭ будем называть реализуемым, если существует $y_i \in Y_i$ такое, что $y_i = x_i$. Очевидно, что в АС с полностью планируемой реализацией множество реализуемых планов X_i совпадает с множеством возможных реализаций Y_i для каждого АЭ, причем

$$\text{если } x_i \in X_i, \text{ то } x_i \in B_i(x_i). \quad (2.1)$$

Индивидуальным целям каждого АЭ соответствует целевая функция $W_i = f_i(\lambda, x_i, y_i)$. Естественно предположить, что при несопадении плана и реализации АЭ штрафует. Формально это можно отразить в виде

$$f_i(\lambda, x_i, y_i) < f_i(\lambda, y_j, y_i), \text{ если } x_i \neq y_i, \quad (2.2)$$

т. е. при данной реализации y_i значение целевой функции i -го АЭ максимально, если реализация y_i была запланирована.

§ 3. Учет будущего в критериях эффективности АЭ

Функция $W_i = f_i(\lambda, x_i, y_i)$ отражает интересы АЭ только в рассматриваемом периоде функционирования. Это оправданно, если принимаемые решения в данном периоде функционирования не влияют на будущие периоды (более точно, на план x_i , управление λ и множество возможных реализаций $B_i(x_i)$ в будущие

периоды). Однако если такое влияние имеет место, то естественно принять, что АЭ прогнозирует последствия принимаемых решений. В качестве примера укажем на известный в экономике принцип «планирования от достигнутого», когда выпуск продукции предприятием в данном периоде влияет на планы будущих периодов. В таких условиях предприятиям может оказаться целесообразным снижать эффективность работы «сегодня» с тем, чтобы обеспечить выгодные условия работы «завтра». Как отмечается во многих работах, практика планирования от достигнутого приводит в ряде случаев к занижению хозяйственными организациями своих возможностей при формировании планов. Способы и степень учета будущего для различных элементов во многом определяются субъективными характеристиками руководителей. Функцию, которая отражает интересы АЭ в данном периоде функционирования с учетом будущих периодов будем называть критерием эффективности АЭ с учетом будущих периодов функционирования. Так, в качестве критерия эффективности АЭ, учитывающего в k -м периоде функционирования N_i будущих периодов, можно принять

$$W_i^k = f_i(\lambda^k, x_i^k, y_i^k) + \sum_{q=k+1}^{k+N_i} f_i(\lambda^q, x_i^q, y_i^q). \quad (3.1)$$

Число N_i , равное числу будущих периодов, учитываемых АЭ в критерии эффективности, называется степенью дальновидности i -го АЭ.

Другой формой отражения будущего может быть представление критерия эффективности как суммы целевой функции в текущем периоде и взвешенной суммы целевых функций в последующих периодах

$$W_i^k = f_i(\lambda^k, x_i^k, y_i^k) + \sum_{q=k+1}^{\infty} \delta_i^{q-k} f_i(\lambda^q, x_i^q, y_i^q). \quad (3.2)$$

Можно рассмотреть случай, когда суммирование распространяется только на ряд последующих периодов. Коэффициент δ_i^{q-k} , называемый в экономических работах коэффициентом дисконтирования, характеризует степень дальновидности элемента $N_i = \infty$. Обычно предполагается, что $0 < \delta_i < 1$. Особенностью критерия (3.2) является его скользящий характер $W_i^k = f_i(\lambda^k, x_i^k, y_i^k) + \delta_i W_i^{k+1}$, т. е. критерий эффективности в периоде k есть сумма целевой функции в периоде k и взвешенного критерия эффективности следующего периода. В качестве критерия эффективности можно рассматривать и функцию следующего вида:

$$W_i^k = \min_{q \geq k} \delta_i^{q-k} f_i(\lambda^q, x_i^q, y_i^q), \quad \text{где } 1 \leq \delta_i < \infty,$$

которая также имеет в некотором смысле скользящий характер

$$W_i^k = \min(f_i^k, \delta_i W_i^{k+1}).$$

§ 4. Описание АС в целом

Описание АС в целом включает в себя описание структурных элементов АС: центра, активных элементов, внешней среды и АС как системы элементов. В детерминированных моделях будем предполагать состояние внешней среды известным как центру, так и активным элементам. Центр будем считать административным органом, имеющим право устанавливать управление и план в каждом периоде функционирования. Кроме того, Ц имеет право проводить «реорганизацию системы» с целью повышения эффективности управления. Более подробно действия центра мы рассмотрим ниже.

Состояние АС определим как совокупность состояний АЭ $u = \{u_i\}$, $u \in Y$. Здесь Y множество возможных состояний АС в целом $\left(Y \subset \prod_{i=1}^n Y_i\right)$. Соответственно план АС определим как со-

вокупность планов АЭ $x = \{x_i\}$. Множество реализуемых планов X АС в системе с полностью планируемой реализацией совпадает с множеством Y возможных состояний АС.

Целевая функция $W = \Phi(\lambda, x, u)$ активной системы удовлетворяет условию

$$\Phi(\lambda, x, u) < \Phi(\lambda, u, u), \text{ если } x \neq u, \quad (4.1)$$

что соответствует потерям в системе при несовпадении плана и реализации (например, введение штрафов в целевую функцию центра управляющим органом более высокого уровня).

§ 5. Активная система с независимыми активными элементами

Разберем более подробно понятие активной системы с независимыми активными элементами. Как отмечалось выше, в АС с независимыми АЭ при установленном плане x_i , АЭ может выбрать реализацию y_i из некоторого множества $B_i(x_i)$ независимо от других элементов. Возможность такого выбора требует определенных ограничений на план x . А именно любой план x должен удовлетворять условию

$$B(x) \subset Y, \quad \text{где } B(x) = \prod_{i=1}^n B_i(x_i). \quad (5.1)$$

Действительно, только в этом случае любой выбор реализаций $y_i \in B_i(x_i)$ даст реализацию системы $u \in Y$. Множество планов x , удовлетворяющих (5.1) обозначим через Z . Очевидно, в системе с независимыми элементами процедура планирования в центре должна быть такой, чтобы получаемые планы $x \in Z$. Приведем несколько примеров систем с независимыми элементами.

Пример 1. (Распределение ресурсов.) Рассмотрим АС, состоящую из центра, n предприятий и централизованного

склада сырьевых ресурсов. Обозначим R_j количество ресурсов вида j на складе в рассматриваемом периоде функционирования ($j=1 \div m$). Составляющие плана $\mathbf{x}^{\text{вх}} = \{x_i^{\text{вх}}\}$ соответствуют планируемому центру распределению ресурсов по предприятиям. Примем, что предприятия используют все распределенные им ресурсы, т. е. $\mathbf{y}^{\text{вх}} = \mathbf{x}^{\text{вх}}$. Из условия $\sum_i y_{ij}^{\text{вх}} \leq R_j$, получаем, что множество $\mathbf{Z}$ определяется неравенствами

$$\sum_i^n x_{ij}^{\text{вх}} \leq R_j. \quad (5.2)$$

Переработка ресурсов на предприятии i дает определенный эффект $y_i^{\text{вых}}$ (скаляр). Обозначим $V_i(y_i^{\text{вх}})$ максимальный эффект, который можно получить на предприятии i при существующей технологии производства и производственных мощностях. Реальный эффект $y_i^{\text{вых}}$ может быть меньше $V_i(y_i^{\text{вх}})$ по причинам плохой организации труда, слабой заинтересованности предприятия в раскрытии всех резервов производства и т. д. Таким образом, множество Y_i реализаций и множество X_i реализуемых планов описываются неравенствами

$$Y_i = \{y_i^{\text{вх}}, y_i^{\text{вых}} : 0 \leq y_i^{\text{вх}} < \infty, 0 \leq y_i^{\text{вых}} \leq V_i(y_i^{\text{вх}})\},$$

$$X_i = \{x_i^{\text{вх}}, x_i^{\text{вых}} : 0 \leq x_i^{\text{вх}} < \infty, 0 \leq x_i^{\text{вых}} \leq V_i(x_i^{\text{вх}})\}.$$

Множество $B_i(x_i)$ определяется соотношениями

$$B(x_i) = \{y_i^{\text{вх}}, y_i^{\text{вых}} : y_i^{\text{вх}} = x_i^{\text{вх}}, 0 \leq y_i^{\text{вых}} \leq V_i(x_i^{\text{вх}})\}.$$

Заметим, что изменение множеств $B_i(x_i)$ изменяет и множество $\mathbf{Z}$. Пусть, например, Ц предоставляет предприятиям право перерасхода каждого вида ресурса до 10% от планируемых количеств. Множество $B_i(x_i)$ в этом случае будет определяться условиями

$$B_i(x_i) = \{y_i^{\text{вх}}, y_i^{\text{вых}} : x_i^{\text{вх}} \leq y_i^{\text{вх}} \leq 1,1x_i^{\text{вх}}, 0 \leq y_i^{\text{вых}} \leq V_i(y_i^{\text{вх}})\},$$

а множество $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = \left\{ x_i^{\text{вх}}, x_i^{\text{вых}} : \sum_{i=1}^n x_{ij}^{\text{вх}} \leq \frac{10}{11} R_j \right\}. \quad (5.3)$$

Центр должен при распределении ресурсов учитывать ограничения (5.3). Если же Ц будет и в этом случае учитывать «естественные» ограничения (5.2), то при $\sum_{i=1}^n x_{ij}^{\text{вх}} = R_j$ и выборе $y_{ij}^{\text{вх}} = 1,1x_{ij}^{\text{вх}}$ соответствующая реализация $\mathbf{y} \notin \mathbf{Y}$. Следовательно, АС уже не будет системой с независимыми элементами.

Пример 2. (Горизонтальные связи.) Рассмотрим АС, состоящую из центра и n предприятий. Примем, что пред-

приятие i выпускает продукцию одного вида, используя в качестве сырья продукцию других предприятий. Обозначим r_{ij} количество продукции j -го предприятия, требуемое для выпуска единицы продукции предприятием i . Обозначим далее $y_i^{\text{вх}}$ — количество продукции, производимое предприятием i (скаляр), $y_{ij}^{\text{вх}}$ — количество продукции, поставляемой i -му предприятию с j -го. Тогда множество Y_i возможных реализаций предприятия i описывается условиями

$$0 \leq y_{ij}^{\text{вх}} < \infty, \quad 0 \leq y_i^{\text{вх}} \leq \min_{j: r_{ij} > 0} \frac{y_{ij}^{\text{вх}}}{r_{ij}}. \quad (5.4)$$

Множество Y возможных реализаций АС определяется условиями (5.4) и

$$\sum_{i=1}^n y_{ij}^{\text{вх}} \leq y_j^{\text{вых}}. \quad (5.5)$$

Обозначим $x_i^{\text{вх}}$ — вектор планируемых поставок предприятию i другими предприятиями, $x_i^{\text{вых}}$ — планируемый выпуск продукции предприятием i . Определим множество $B_i(x_i)$ условиями (5.4) и следующими ограничениями:

$$y_i^{\text{вх}} \leq x_i^{\text{вх}}, \quad y_i^{\text{вых}} \geq x_i^{\text{вых}}. \quad (5.6)$$

Очевидно, что множество Z определяется условиями

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^{\text{вх}} \leq x_j^{\text{вых}}.$$

Если отказаться от условий $y_i^{\text{вых}} \geq x_i^{\text{вых}}$, которые представляются слишком жесткими требованиями безусловного выполнения предприятиями плановых заданий, то систему с независимыми элементами можно получить при наличии достаточных запасов продукции на складах. Множество Y при этом будет описываться только условиями (5.4), т. е. $Y = \prod_{i=1}^n Y_i$.

Пример 3. (Сильные штрафы.) Система с сильными штрафами характеризуется резким уменьшением значения целевой функции АЭ при отклонении реализации от плана. Другими словами, наказание за отклонение от плана настолько велико, что разумной стратегией поведения АЭ является безусловное выполнение плановых заданий, т. е. $y=x$. Корректность такого определения системы с сильными штрафами требует реализуемости плана x , т. е. $x \in X$. При этом АС, очевидно, является системой с независимыми элементами, так как $B(x) = x \in X = Y$.

Рассмотренные примеры показывают, что АС с независимыми элементами является достаточно общей моделью организационных систем.

§ 6. Описание центра и его действий

Центр отвечает за эффективность функционирования системы и обязан заботиться о совершенствовании системы управления. В связи с этим Ц имеет право менять структуру системы и механизм ее функционирования (закон управления, целевые функции элементов и т. д.). Мы будем рассматривать действия центра по формированию механизма функционирования и по выработке управляющих воздействий при сформированном механизме.

1. Действия центра по формированию механизма функционирования системы.

а) Организация процедуры формирования данных. Для принятия решений о значениях управления и плана Ц должен располагать информацией о возможностях, потребностях и целях элементов. Без ограничения общности можно принять, что множества $Y_i(r_i)$, $B_i(x_i, r_i)$, $Y(r)$, известны центру с точностью до значения параметров $r = \{r_i\}$, где r_i векторы конечной размерности. Относительно значений r_i Ц располагает меньшей информацией по сравнению с АЭ. А именно мы будем рассматривать случай, когда Ц знает лишь множества Ω_i возможных значений r_i , в то время как каждый АЭ располагает достоверной информацией относительно r_i . Если знания $r = \{r_i\}$ с точностью лишь

до множества $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i$ недостаточно для эффективного управления системой, то Ц должен организовать процедуру формирования данных. Подробное описание таких процедур будет рассмотрено ниже.

б) Формирование системы стимулирования. Действия центра по формированию целевых функций АЭ называют критериальным управлением, что на практике связано с возможностью изменения системы оплаты, введения штрафов, поощрений, организации соревнования и премирования в зависимости от занятого места и т. д. Кроме того, центр может установить ограничения $B_i(x_i)$ на выбор элементами реализаций y_i , что формально сводится к критериальному управлению, если в целевые функции элементов ввести большие штрафы в случае $y_i \notin B_i(x_i)$.

в) Выбор закона управления (процедур принятия решений). При формировании управления и плана Ц использует информацию о параметрах моделей АЭ. Обозначим $\sigma = \{\sigma_i\}$ оценки вектор-параметров r , используемые центром при принятии решений (очевидно, что $\sigma \in \Omega$, но в общем случае $\sigma \neq r$). Процедуру формирования плана и управления можно теперь определить как

отображение $\sigma \rightarrow \lambda$, $x: \pi(\sigma) = \{\lambda(\sigma), x(\sigma)\}$. Будем называть $\pi(\sigma)$ законом управления в АС.

2. Действия центра по выработке управляющих воздействий при сформированном механизме функционирования АС. В случае, если механизм функционирования задан, действия центра формально сводятся к выполнению вычислительной процедуры по определению оценок σ и выработке управления $\lambda(\sigma)$ и плана $x(\sigma)$.

§ 7. Способы формирования данных

Можно указать несколько способов формирования данных о моделях элементов в иерархической системе.

При адаптивном способе оценки a_i вектор-параметров r_i определяются на основании информации о «прошлых» управлениях, планах, реализациях и оценках по некоторому закону

$$a_i^k = \xi_{ik}[\{\lambda^q\}, \{x_i^q\}, \{y_i^q\}, \{a_i^q\}], q \leq k-1.$$

Примерами адаптивного способа могут служить хорошо известные в экономике процедуры «планирования от достигнутого», «планирования от среднего показателя за ряд предшествующих периодов» и др.

З а м е ч а н и е. В ряде случаев на практике процедура формирования оценок $\{a_i\}$ не выделяется, а управление λ^k и план x^k в периоде k непосредственно определяются в зависимости от управления, планов и реализаций предыдущих периодов.

Встречный способ формирования данных состоит в том, что каждый элемент сообщает в центр оценку $s_i \in \Omega_i$ вектор-параметра r_i .

В общем случае возможны и комбинированные способы формирования данных. Например, ряд параметров может оцениваться на основе адаптивного способа, а остальные на основе встречного, либо оценка вектор-параметров строится как комбинация оценок, полученных адаптивным и встречным способом. Таким образом, общая процедура формирования в центре оценок σ_i вектор-параметров r_i может быть записана как $\sigma_i(a_i, s_i)$. Так, процедура формирования данных «встречный план» построена следующим образом. Планирующий орган (центр) принимает в качестве базовых показатели, достигнутые в прошлые периоды функционирования $a_i' = a_i(1 + \varepsilon)$, где ε — темп роста (адаптивный способ). Если же предприятие предлагает достигнуть в плановом периоде показатели s_i , превышающие a_i' , то в качестве оценок σ_i центр принимает s_i (встречный способ). Следовательно, процедура «встречный план» $\sigma_i(a_i, s_i) = \max(a_i', s_i)$ является комбинированной.

З а м е ч а н и е. На практике в качестве оценок часто непосредственно сообщаются варианты планов. При этом процедура

носит итеративный характер взаимоувязки планов различных элементов. В таких случаях трудно выделить отдельный этап формирования данных, так как одновременно ведется и разработка плана системы.

§ 8. Некоторые законы управления активными системами

Опишем несколько законов управления, наиболее важных для дальнейшего.

В настоящее время задачу планирования в экономической системе часто понимают как решение некоторой задачи оптимизации.

Детерминированная задача оптимального планирования строится как задача максимизации (минимизации) целевой функции АС при ограничениях $X(\sigma)$. Как правило, в задачу оптимизации управление λ не входит. Далее неявно предполагается, что планы, получаемые в результате решения задачи, реализуемы, т. е. $y=x$. При этих условиях задача оптимального планирования принимает вид

$$\Phi(x) \rightarrow \max, \quad x \in X(\sigma).$$

Развитием процедуры оптимального планирования является принцип жесткой централизации (ЖЦ). При планировании на основе принципа ЖЦ учитывается, что АЭ имеют свободу выбора. А именно Ц предполагает, что каждый АЭ, выбирает реализацию y_i^* из условия

$$f_i(\lambda, x_i, y_i^*) = f_i[\lambda, x_i, \xi_i(\lambda, x_i, r_i)] = \max_{z \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda, x_i, z).$$

Обозначим $T(\lambda, x, r)$, множество реализаций $y = \{\xi_i(\lambda, x_i, r_i)\}$, удовлетворяющих этому условию. Обозначим далее

$$\varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \max_{z \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda, x_i, z), \quad (8.1)$$

$$\Psi(\lambda, x, r) = \min_{z \in T(\lambda, x, r)} \Phi(\lambda, x, z). \quad (8.2)$$

Принцип ЖЦ формально записывается в виде следующей задачи оптимизации:

$$\Psi(\lambda, x, \sigma) \xrightarrow{\lambda, x} \max, \quad (8.3)$$

$$x \in X(\sigma), \quad \lambda \in L. \quad (8.4)$$

В главе I на примере задачи производства продукции показано, что применение центром принципа ЖЦ может привести к недостоверности сообщаемой АЭ информации и, как следствие, к низкой эффективности функционирования АС.

Принцип *открытого* управления (ОУ). К задаче (8.3), (8.4) добавляются условия *совершенного* согласования

$$\varphi_i(\lambda, x_i, \sigma_i) = \max_{z \in X_i(\sigma_i)} \varphi_i(\lambda, z, \sigma_i). \quad (8.5)$$

Условия (8.5) отражают требование «выгодности» назначаемых центром планов для АЭ. Множество оптимальных решений задачи (8.3) ÷ (8.5) определяет множество законов ОУ. Конкретный закон ОУ получается, если определить правило однозначного выбора решения. Оценка $\varphi_i(\lambda, x_i, \sigma_i)$ целевой функции $\varphi_i(\lambda, x_i, r_i)$ называется функцией предпочтения активного элемента. Анализ принципа ОУ для ряда задач в предыдущем разделе показал, что законы ОУ, как правило, стимулируют сообщение достоверной информации. Однако эффективность функционирования системы может быть низкой, если целевые функции АЭ «плохо согласованы» с целевой функцией системы.

Обобщением принципа ОУ является принцип согласованного управления (СУ), который определяется как решение задачи (8.3), (8.4) с дополнительными условиями согласования

$$\psi_i(\lambda, x_i, \sigma_i) = \max_{z \in X_i(\sigma_i)} \psi_i(\lambda, z, \sigma_i), \quad (8.6)$$

где $\psi_i(\lambda, x_i, \sigma_i)$ — функция предпочтения i -го АЭ. Определив конкретный вид функции предпочтения и правило однозначного выбора решения (в случае его неединственности), центр получает некоторый закон СУ. Заметим, что при $\psi_i = \varphi_i$, мы получаем закон ОУ, а если ψ_i не зависит от x_i , — закон ЖЦ. Содержательно задача определения плана $x(\sigma)$ и управления $\lambda(\sigma)$ в законах СУ является задачей определения наилучшего плана с точки зрения интересов системы в целом при условии согласования этого плана с интересами подсистем, т. е. является задачей оптимального согласованного планирования. Необходимость согласования интересов центра и подчиненных ему подсистем в экономических системах централизованного планирования была обоснована в работах советских экономистов. Так, академик В. С. Немчинов писал о соотношении интересов общества и отдельных его ячеек (в связи с введением хозрасчетной системы): «Хозрасчетная система планирования будет действовать безотказно только в том случае, если она будет построена на следующем принципе: все то, что полезно и выгодно для народнохозяйственного целого, должно быть выгодно и для предприятия, реализующего соответствующую часть плана в качестве исполнительного звена».

В первоначальном варианте принципа СУ функции предпочтения имели вид

$$\psi_i(\lambda, x_i, \sigma_i) = 1 [\varphi_i(\lambda, x_i, \sigma_i) - \varepsilon_i \max_{z \in X_i(\sigma_i)} \varphi_i(\lambda, z, \sigma_i)],$$

где $1[u]=0$, если $u < 0$, и $1[u]=1$, если $u \geq 0$, $0 < \varepsilon_i \leq 1$. Условия согласования при этом записываются в виде

$$\varphi_i(\lambda, x_i, \sigma_i) \geq \varepsilon_i \max_{z \in X_i(\sigma_i)} \varphi_i(\lambda, z, \sigma_i) \quad (8.7)$$

и называются условиями ε -согласования. Заметим, что при $\varepsilon_i=1$ получаем принцип ОУ. Предлагались и другие функции предпочтения, например

$$\psi_i(\lambda, x_i, \sigma_i) = 1[\varphi_i(\lambda, x_i, \sigma_i) - g_i], \quad (8.8)$$

где g_i — заранее оговоренный уровень (условия гарантированного согласования).

§ 9. Критериальное управление

Под критериальным управлением понимается право (возможность) центра выбирать (или изменять) целевые функции АЭ в рамках определенных ограничений. Часто вид целевых функций задан параметрически, а конкретные значения параметров выбираются центром. Такими параметрами могут быть, например, коэффициенты штрафов за отклонение реализации от плана. Специфическим видом критериального управления является введение штрафов за искажение данных, нормирование целевых функций и организация соревнования.

а) Штраф за искажение данных. Если $y_i \notin B_i(x_i, \sigma_i)$, то очевидно $\sigma_i \neq r_i$. В этом случае Ц может применить систему штрафов за искажение данных, определяя оценку σ_i^p такую, что $y_i \in B_i(x_i, \sigma_i^p)$. Случай сильных штрафов за искажение данных определяется условием $\sigma_i^p = \sigma_i$, что эквивалентно ограничению $y_i \in B_i(x_i, \sigma_i)$ на множество выбираемых реализаций.

б) Нормирование функций цели элементов означает, что на этапе реализации оплата (или часть ее) производится из общего фонда M , размеры которого ограничены

$$f_i^H(\gamma_n, \lambda, x_i, y_i) = \gamma_n(\lambda, x, y) f_i(\lambda, x_i, y_i),$$

$$\gamma_n(\lambda, x, y) = \frac{M}{\sum_{i=1}^n f_i(\lambda, x_i, y_i)}.$$

Примеры применения нормирования для повышения эффективности функционирования АС рассмотрены в первом разделе.

в) Организация соревнования. В зависимости от сравнительных показателей работы (x, y) на этапе реализации определяется место, занятое элементом в соревновании. Значение целевой функции зависит от занятого места (например, составляющей целевой функции является премия, зависящая от занятого эле-

ментом места в соревновании). Мы будем рассматривать в основном возможности критериального управления с помощью системы штрафов.

§ 10. Функционирование АС

Теперь мы можем описать функционирование АС. Каждый период функционирования включает три этапа: формирование данных, планирование и реализация планов. На этапе формирования данных каждый АЭ сообщает в Ц оценку $s_i \in \Omega_i$ вектор-параметра r_i . На основе оценок $s = \{s_i\}$ и $a = \{a_i\}$, полученных в результате анализа предыдущих периодов, Ц формирует оценки $\sigma(a, s) = \{\sigma_i(a_i, s_i)\}$. Заметим, что некоторые из действий могут отсутствовать (например, при адаптивном способе формирования данных элементы не сообщают оценок s_i).

На этапе планирования Ц определяет управление $\lambda(\sigma)$ и план $x(\sigma)$ активной системы по заданному закону управления $\pi(\sigma)$ и сообщает их АЭ. На этапе реализации каждый АЭ выбирает реализацию $y_i \in B_i(x_i, r_i)$. В конце периода функционирования как центр, так и элементы могут определить достигнутые значения их целевых функций.

Особо остановимся на вопросах реализуемости механизма функционирования. Содержательно условие реализуемости означает, что любая реализация $y = \{y_i\}$ должна принадлежать множеству Y возможных реализаций. Для систем с независимыми элементами проблемы не возникает, так как $y \in B(x) \subset Y$. В общем случае $B(x) \not\subset Y$ и необходимо исключить возможность выбора $y \in B(x) \setminus Y$. Рассмотрим, например, систему снабжения, и пусть имеющееся количество продукции недостаточно для выполнения заказов всех потребителей (это может быть связано с тем, что поставщики не выполнили плана поставок, либо потребители заказали больше, чем было запланировано). В этом случае необходимо доопределить механизм функционирования некоторой процедурой распределения ограниченных ресурсов на этапе реализации. Один из вариантов заключается в организации очереди (либо в случайном порядке, либо в соответствии с некоторыми показателями приоритета потребителей). Другой возможный вариант — решение центром задач оперативного управления (например, переприкрепление потребителей к поставщикам так, чтобы минимизировать потери от дефицита продукции). Возможны и другие варианты. В любом случае при описании механизма функционирования необходимо предусмотреть процедуру, обеспечивающую выбор реализации из множества возможных реализаций.

В дальнейшем, если не оговорено особо, мы будем рассматривать АС с независимыми АЭ, в которых проблема реализуемости механизма функционирования не возникает.

§ 11. Обсуждение

Перечислим свойства «активности» организационных подсистем, формализованные в описании активного элемента.

а) Наличие цели и учет будущих последствий принимаемых решений. Формально это свойство отражено тем, что в выражение критерия эффективности данного периода входят целевые функции будущих периодов.

б) Определенная свобода действий при сообщении информации и реализации планов. Действительно, каждый элемент может сообщать любую оценку s_i из множества Ω_i и выбирать любую реализацию y_i из множества $B_i(x_i, r_i)$.

в) Информированность элемента о механизме функционирования системы.

Описанная АС является многокритериальной системой, в которой элементы имеют право самостоятельно принимать решения. Ситуация носит игровой (конфликтный) характер и требует теоретико-игрового подхода.

Опишем в содержательной форме основные задачи теории двухуровневых АС.

I. Задача анализа механизма функционирования. Задан механизм функционирования. Исходя из разумных гипотез о поведении АЭ, определить, какие оценки s они будут сообщать на этапе формирования данных, какие реализации y выбирать на этапе реализации и какая при этом будет эффективность функционирования системы?

II. Задача синтеза оптимального механизма функционирования АС. Определить механизм функционирования, обеспечивающий максимальную эффективность функционирования системы.

При решении задачи II отдельные составляющие механизма функционирования могут быть уже заданными. Так, если задан способ формирования данных и система стимулирования, получаем задачу выбора оптимального закона управления. Если задан способ формирования данных и закон управления, то получаем задачу критерияльного управления и т. д.

Глава VIII

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

В данной главе рассматриваются постановки задач управления в АС. Для их формализации привлекается аппарат теории игр. С этих позиций функционирование АС рассматривается как бескоалиционная игра многих лиц (активных элементов). Чтобы описать бескоалиционную игру, надо определить участников игры, их критерии эффективности, стратегии и ограничения на поведение игроков, а также их представление об игре. Задав описание игры, можно ввести те или иные принципы выбора рациональных стратегий игроками, что, в свою очередь, позволит определить решение игры. Таким образом, применение игрового подхода позволяет свести задачу анализа функционирования АС к задаче анализа решения соответствующей игры, а задачи синтеза механизмов функционирования — к задачам выбора Ц таких управленческих стратегий, определяющих правила игры между элементами, которые обеспечивают нужные свойства соответствующего решения игры.

§ 1. О решении игры активных элементов

Для дальнейшего существенно важным является понятие решения игры АЭ. Рассмотрим игру n участников, целевые функции которых $W_i = f_i(u_1 \dots u_n)$, u_i — стратегия игрока i , U_i — множество его допустимых стратегий.

Выбор стратегии происходит в условиях неполной информированности: игроку могут быть не известны все или некоторые стратегии других игроков j , $j \neq i$. В настоящее время не существует единого понятия оптимального выбора стратегий игроками в игре с непротивоположными интересами и вряд ли можно ожидать его появления. В первую очередь это связано с большой неопределенностью, вносимой в результат разнообразием возможных действий оперирующих сторон. В связи с этим термин «оптимальный выбор», пригодный в случае одного игрока или антагонистической игры двух лиц, заменяют на термин «рациональный выбор». Принцип рационального выбора стратегии i -го игрока состоит в том, что он сводит критерий f_i к f_i^* , зависящему от известных параметров и собственной стратегии, после чего путем оптимизации f_i^* определяется выбираемое в игре значение собственной стратегии. Правило перехода от f_i

к $f_i^* : f_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \Rightarrow f_i^*(u_i, \beta_i(u))$ удобно назвать правилом Π_i устранения неопределенности ($\beta_i(u)$ известные i -му игроку стратегии других игроков). Таким образом, в применении к неопределенности, связанной с незнанием игроком стратегий других игроков, принцип выбора рациональных стратегий состоит в следующем:

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \Rightarrow f_i^*(u_i, \beta_i(u)) \xrightarrow{u_i} \max.$$

Если играется несколько повторяющихся партий игры, то принцип выбора рациональных стратегий записывается уже для каждой партии

$$f_i(u_1^k, u_2^k, \dots, u_n^k) \Rightarrow f_i^*(u_i^k, \beta_i(u^k, u^{k-1})) \xrightarrow{u_i^k} \max, \quad (1.2)$$

где $\beta_i(u^k, u^{k-1})$, известные i -му игроку стратегии данной и предыдущей партий. Мы будем предполагать, что игрок использует информацию только о стратегиях данной и предыдущей партий игры.

Обозначим через R_i^k множество стратегий i -го игрока в k -й партии игры. $R^k = R_1^k \times R_2^k \times \dots \times R_n^k$ называется множеством решений k -й партии игры, а любая ситуация $u^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_n^k) \in R^k$ — решением k -й партии игры.

Если правила устранения неопределенности не предполагают использование информации о прошлых партиях, то определяемое таким образом множество решений игры будет одним и тем же для всех партий игры. В случае, если предполагается использование такой информации, то множество решений игры может быть, вообще говоря, различным для разных партий. Поэтому в игре с повторяющимися партиями целесообразно ввести понятие устойчивого решения игры. Множество $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ будем называть множеством устойчивых решений игры, если для любой ситуации $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*) \in R$

$$f_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*) \Rightarrow f_i^*(u_i^*, \beta_i(u^*, u^*)) = \max_{u_i \in U_i} f_i^*(u_i, \beta_i(u^*, u^*)). \quad (1.3)$$

Любую ситуацию $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*) \in R$ будем называть устойчивым решением игры.

Пусть в начальной партии игры k_0 игроки выбрали любые допустимые стратегии $u^{k_0} \in U = \prod_{i=1}^n U_i$. Множество $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ устойчивых решений игры будем называть глобально

устойчивым, если

$$u^k \rightarrow u^*, \quad u^k \in R^k, \quad (1.4)$$

где u^* некоторая ситуация из R (при любых стратегиях игроков в начальной партии множества решений игры «стягиваются» с увеличением числа партий к множеству устойчивых решений игры).

Несколько забегаая вперед, отметим, что в качестве множества решений игры АЭ мы будем понимать глобально устойчивые множества в смысле (1.4), и вот почему. Приводимые далее теоретико-игровые постановки задач управления в АС заключаются в определении механизма функционирования, максимизирующего критерий эффективности Ц в решениях игры АЭ.

Чтобы получить оценку механизма функционирования, не зависящую от номера партии, целесообразно решением игры считать только устойчивые решения. Однако при этом сразу возникает вопрос о глобальной устойчивости множества решений. Такой подход в содержательном плане означает, что Ц рассматривает функционирование АС и решает соответствующие задачи управления только в стационарных режимах.

Приведем примеры часто рассматриваемых принципов выбора рациональных стратегий и рассмотрим соответствующие решения игры, к которым приводит применение игроками этих принципов.

Пример 1. Принцип максимального гарантированного результата. По отношению к неопределенности, связанной с незнанием стратегий других игроков, игрок i выступает с позиций гарантированного результата

$$\Pi_i \quad f_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \Rightarrow \min_{u(i) \in U(i)} f_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \xrightarrow{u_i} \max.$$

Здесь $u(i) = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$, $U(i) = \prod_{j \neq i} U_j$. Если все игроки придерживаются при выборе стратегий принципа максимального гарантированного результата, то множеством решений k -ой партии игры является множество R ситуаций таких, что $\forall u \in R$ выполняется

$$\min_{u(i) \in U(i)} f_i(u) = \max_{z_i \in U_i} \min_{z_{-i} \in U(-i)} f_i(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Поскольку приведенное правило устранения неопределенности не использует информации о прошлых партиях игры, то множество решений игры не меняется от партии к партии, т. е. любое решение игры является устойчивым, а множество R глобально устойчивым множеством решений игры.

Пример 2. Индикаторное поведение. Индикаторное правило выбора рациональных стратегий i -го игрока в игре с повторяющимися партиями может быть записано следующей итерационной процедурой:

$$u_i^k = u_i^{k-1} + \gamma_i^{k-1} [\omega_i(u^{k-1}(i)) - u_i^{k-1}].$$

Здесь $\hat{u}_i^{k-1} = \omega_i(u^{k-1}(i))$ — точка максимума по собственным переменным u_i^{k-1} целевой функции i -го игрока в $(k-1)$ партии игры при наборе стратегий $u^{k-1}(i) = (u_1^{k-1}, \dots, u_{i-1}^{k-1}, u_{i+1}^{k-1}, \dots, u_n^{k-1})$ других игроков. Конкретное значение γ_i^{k-1} , определяющее величину шага $\Delta u_i^k = u_i^k - u_i^{k-1}$, может зависеть от времени, текущего состояния и некоторых других, например, случайных или внешних по отношению к модели параметров. Индикаторный принцип выбора стратегий предполагает, что игрок в k -й партии игры, зная стратегии всех игроков в $(k-1)$ партии, может определить зависимость своей целевой функции от собственных переменных u_i^{k-1} и делает шаг в сторону ее увеличения, предполагая стратегии остальных игроков неизменными. Если в точке u_i^{k-1} целевая функция игрока достигает максимума на U_i , то игрок i сохраняет стратегию ($u_i^k = u_i^{k-1}$).

З а м е ч а н и е. Возможны варианты индикаторного поведения, в которых игрок определяет точку максимума $\hat{u}_i^{k-1}$ не на всем множестве U_i , но в некоторой окрестности $U_i' \subset U_i$ точки u_i^{k-1} . Практически важным является случай, когда наблюдаемыми величинами для игрока являются не вектор-стратегии остальных игроков, а лишь некоторые агрегаты от этих стратегий: $z_i(u) = (z_{i1}(u), z_{i2}(u), \dots, z_{im}(u))$. Стратегия игрока строится в этом случае как функция агрегатов стратегий других игроков. При большом числе игроков этот подход представляется более реалистичным, поскольку количество наблюдаемых агрегатов, достаточное для индикаторного выбора стратегий, может быть существенно меньше числа переменных, описывающих стратегии всех игроков в игре.

Устойчивым решением игры при индикаторном поведении всех игроков является любая ситуация равновесия по Нэшу u^* . Действительно, по определению ситуация u^* называется равновесной по Нэшу, если

$$f_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*) = \max_{u_i \in U_i} f_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_n^*).$$

В силу этого, если в $(k-1)$ партии игры игроки сообщили набор стратегий $u^{k-1} = u^*$, индикаторный принцип выбора рациональных стратегий в k -ой партии тоже приведет к ситуации $u^k = u^*$.

Отметим, что множество ситуаций равновесия по Нэшу не всегда является глобально устойчивым.

Можно назвать и другие принципы выбора рациональных стратегий: «абсолютно оптимальные» стратегии, коалиционные

стратегии, ситуации, оптимальные по Парето. В принципе может оказаться, что в одной и той же игре игроки могут придерживаться различных принципов выбора рациональных стратегий.

Обратимся теперь к случаю, когда в игре с повторяющимися партиями игрок пытается максимизировать суммарный выигрыш за ряд партий. Если выбор стратегии в каждой партии не влияет на значения целевой функции в последующих партиях, то оптимизация критерия эффективности

$$W_i^k = f_i(u^k) + \sum_{q=k+1}^{k+N_i} f_i(u^q), \quad (1.5)$$

учитывающего N_i будущих партий, сводится к оптимизации целевой функции в отдельном периоде функционирования.

Более сложным классом представляются игры, в которых целевые функции игроков зависят от стратегий, выбираемых в ряде партий. Выбор стратегий i -м игроком в k -й партии игры происходит при незнании $u^p(i) = (u_i^p, \dots, u_{i-1}^p, u_{i+1}^p, \dots, u_n^p)$ ($p = k \div k + N_i$). Принцип выбора рациональных стратегий в этом случае можно представить в виде следующей схемы: сначала игрок устраняет неопределенность, связанную с незнанием $u^p(i)$, применяя правило Π_i' . При этом критерий (1.5) приводится к виду

$$f_i^{**}(u_i^k, \beta_i(u^k, u^{k-1})) + \sum_{q=k+1}^{k+N_i} \tilde{f}_i(u_i^q). \quad (1.6)$$

Затем он устраняет неопределенность, связанную с незнанием стратегий u_i^q в будущие периоды $q = (k+1) \div (k+N_i)$, применяя правило Π_i'' . Объединяя правила Π_i' и Π_i'' устранения неопределенности в одно правило Π_i , получаем

$$W_i^k = f_i(u^k) + \sum_{q=k+1}^{k+N_i} f_i(u^q) \xrightarrow[u_i^k]{\Pi_i} f_i^*(u_i^k, \beta_i(u^k, u^{k-1})) \rightarrow \max. \quad (1.7)$$

Теперь можно определить множество решений в k -ой партии игры, множество устойчивых решений и глобально устойчивое множество решений, как это было сделано выше. Далее, применительно к моделям, рассматриваемым в теории активных систем, мы приведем примеры принципов выбора рациональных стратегий для игроков, критерии эффективности которых «учитывают будущее».

Рассмотрим теперь игру, в каждой партии которой игроки делают два хода. Первый ход заключается в выборе стратегий $u_i^k \in U_i$, которые сообщаются всем игрокам, после чего они делают второй ход, выбирая $v_i^k \in V_i(u^k)$. Сначала рассмотрим принцип выбора рациональной стратегии второго хода. Выбор v_i^k игрок производит, зная стратегии $u^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_n^k)$ пер-

вого хода. Неопределенность связана с возможным незнанием стратегий v_j^k других игроков. Поэтому принцип выбора стратегии u_i^k может быть представлен схемой (1.2)

$$f_i(u^k, v^k) \Rightarrow f_i^*(u^k, v_i^k, \beta_i(v^k, v^{k-1}, u^{k-1})) \xrightarrow[v_i^k]{\Pi_i^{(2)}} \max. \quad (1.8)$$

Рассмотрим теперь принцип выбора рациональной стратегии u_i^k первого хода. Сначала игрок устраняет неопределенность в правиле (1.8), связанную с незнанием на первом ходе стратегий v^k второго хода

$$f_i^*(u^k, v_i^k, \beta_i(v^k, v^{k-1}, u^{k-1})) \Rightarrow f_i^{**}(u^k, v_i^k, \beta_i(v^{k-1}, u^{k-1})). \quad (1.9)$$

Теперь он может прогнозировать свою стратегию v_i^k из условия максимума (1.9). Обозначим

$$\varphi_i(u^k, \beta_i(v^{k-1}, u^{k-1})) = \max_{v_i \in V_i(u^k)} f_i^{**}(u^k, v_i, \beta_i(v^{k-1}, u^{k-1})). \quad (1.10)$$

Функцию φ_i назовем целевой функцией игрока i , с учетом принципа выбора рациональных стратегий второго хода.

Применяя схему выбора рациональных стратегий (1.2), получим

$$\varphi_i(u^k, \beta_i(v^{k-1}, u^{k-1})) \Rightarrow \varphi_i^*(u_i^k, \beta_i(u^k, v^{k-1}, u^{k-1})) \xrightarrow[u_i^k]{\Pi_i^{(1)}} \max. \quad (1.11)$$

Обозначим через R_i^k множество стратегий первого хода i -го игрока, которые он может выбрать в k -й партии игры в силу принципа выбора рациональных стратегий первого хода (1.11), а через $R^k = \prod_i R_i^k$ — соответствующее множество ситуаций. Отметим, что

множество стратегий второго хода i -го игрока зависит от стратегий, выбранных на первом ходе. Обозначим это множество через $Q_i^k(u^k)$, а через $Q^k(u^k) = \prod_i Q_i^k(u^k)$ соответствующее множество ситуаций второго хода. Множеством решений k -й партии игры называется множество ситуаций $(u^k, v^k) = (u_1^k, v_1^k, u_2^k, v_2^k, \dots, u_n^k, v_n^k)$ таких, что $u_i^k \in R_i^k, v_i^k \in Q_i^k(u^k)$.

Множество $R = \prod_i R_i$ будем называть множеством устойчивых решений игры, если $V(u^*, v^*) \in R$

$$\begin{aligned} f_i(u^*, v^*) &\Rightarrow f_i^*(u^*, v_i^*, \beta_i(v^*, v^*, u^*)) = \\ &= \max_{v_i \in V_i(u^*)} f_i^*(u^*, v_i, \beta_i(v^*, v^*; u^*)), \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(u^*, \beta_i(v^*, u^*)) &\stackrel{\Pi_i^{(1)}}{\Rightarrow} \varphi_i^*(u_i^*, \beta_i(u^*, v^*, u^*)) = \\ &= \max_{u_i \in U_i} \varphi_i^*(u_i, \beta_i(u^*, v^*, u^*)). \end{aligned}$$

Глобально устойчивое множество решений игры определяется аналогично (1.4).

Отдельно укажем на один частный случай двухэтапной игры, который важен для дальнейшего. Пусть целевая функция i -го игрока в k -й партии зависит от стратегий первого хода u^k всех игроков и только его стратегии второго хода v_i^k . В этом случае принцип выбора стратегии второго хода v_i^k определяется однозначно. Действительно, выбор v_i^k происходит в условиях полной информированности, и поэтому отпадает необходимость в правиле устранения неопределенности $\Pi_i^{(2)}$. Принцип выбора оптимальной стратегии v_i^k в этом случае имеет вид

$$f_i(u^k, v_i^k) = \max_{z_i \in V_i(u^k)} f_i(u^k, z_i). \quad (1.13)$$

Откуда, определяя оптимальное значение стратегий второго хода и подставляя его в его целевую функцию, получаем

$$\max_{v_i^k \in V_i(u^k)} f_i(u^k, v_i^k) = \varphi_i(u^k). \quad (1.14)$$

Устойчивое решение игры определяется как ситуация u^*, v^* такая, что

$$f_i(u^*, v_i^*) = \max_{v_i \in V_i(u^*)} f_i(u^*, v_i) = \varphi_i(u^*), \quad (1.15)$$

$$\varphi_i(u^*) \stackrel{\Pi_i^{(1)}}{\Rightarrow} \varphi_i^*(u_i^*, \beta_i(u^*, u^*, v^*)) = \max_{u_i \in U_i} \varphi_i^*(u_i, \beta_i(u^*, u^*, v^*)). \quad (1.16)$$

Для этого частного случая игры мы будем далее часто говорить об устойчивом решении игры (а также о множестве глобально устойчивых решений игры) как о наборе стратегий первого хода $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$, определяемых условиями (1.16), имея при этом в виду, что стратегии второго хода определяются условиями (1.15).

Перейдем теперь к теоретико-игровым постановкам задач управления в АС при встречном способе формирования данных.

§ 2. Игровое описание функционирования АС при встречном способе формирования данных

В игровой интерпретации отдельный период функционирования АС рассматривается как одна партия игры, участниками которой являются n АЭ.

Будем считать, что механизм функционирования $\Sigma = (W, B, \pi)$ определен и не меняется от одного периода функционирования к другому ($W = \{W_i\}$, $B = B(x, r) = \{B_i(x_i, r_i)\}$, $\pi = \pi(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$).

Целевая функция i -го АЭ в k -й партии игры $f_i(\lambda^k, x_i^k, y_i^k)$, а критерий эффективности, учитывающий будущие периоды функционирования

$$W_i^k = f_i(\lambda(s^k), x_i(s^k), y_i^k) + \sum_{q=k+1}^{k+N_i} f_i(\lambda(s^q), x_i(s^q), y_i^q), \quad (2.1)$$

В каждом периоде АЭ делает два хода: стратегией первого хода является оценка $s_i^k \in \Omega_i$, сообщаемая в Ц на этапе формирования данных, стратегией второго хода — реализация $y_i^k \in B_i(x_i(s^k), r_i)$, выбираемая на этапе реализации. При встречном способе формирования данных выбор s_i^k и y_i^k не влияет на установление плана и управления в последующих периодах функционирования. Ввиду этого оптимизация критерия (2.1) сводится к оптимизации

$$W_i^k = f_i(\lambda(s^k), x_i(s^k), y_i^k). \quad (2.2)$$

Таким образом, функционирование АС описывается игрой, в каждой партии которой АЭ делает два хода. Целевая функция каждого АЭ в k -й партии игры зависит от агрегатов стратегий первого хода всех АЭ — плана $x_i(s^k)$ и управления $\lambda(s^k)$, а также от его собственной стратегии второго хода реализации y_i^k .

Выбор оценки s_i^k на этапе формирования данных происходит в условиях неполной информированности (АЭ не известны оценки s_j^k других АЭ и будущая собственная реализация). Наоборот, выбор y_i^k происходит в условиях полной информированности, поскольку на этапе реализации управление $\lambda(s^k)$ и план $x_i(s^k)$ известны. Поэтому в качестве правила выбора реализации i -го АЭ можно принять условие максимума его целевой функции по реализации y_i^k (см. 1.13)

$$\begin{aligned} f_i(\lambda(s^k), x_i(s^k), y_i^k) &= \max_{z_i \in B_i(x_i(s^k), r_i)} f_i(\lambda(s^k), x_i(s^k), z_i) = \\ &= \varphi_i(\lambda(s^k), x_i(s^k), r_i). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Функцию $\varphi_i(\lambda, x_i, r_i)$ можно назвать целевой функцией i -го АЭ в k -м периоде функционирования АС, с учетом правила выбора реализации (2.3) при встречном способе формирования данных. В дальнейшем, если по ходу изложения не будет требоваться дополнительного комментария, $\varphi_i(\lambda(s^k), x_i(s^k), r_i)$ для краткости будем называть просто целевой функцией i -го АЭ в k -м периоде функционирования АС, имея при этом в виду сказанное выше.

Принцип формирования рациональной стратегии первого хода (оценки s_i^k)

$$\varphi_i(\lambda(s^k), x_i(s^k), r_i) \Rightarrow \max_{s_i^k} \Pi_i^{(1)}(\varphi_i^*(s_i^k, \beta_i(s^k, s^{k-1}))) \quad (2.4)$$

где $\beta_i(s^k, s^{k-1})$ — известные i -му АЭ стратегии в периодах k и $(k-1)$. Определив принцип выбора рациональных оценок s_i^k (2.4) и реализаций y_i^k (2.3), можно, следуя (1.15) и (1.16), определить устойчивое решение игры АЭ как набор оценок s^* и реализаций y^* таких, что

$$f_i(\lambda(s^*), x_i(s^*), y_i^*) = \max_{y_i \in B_i(x_i(s^*), r_i)} f_i(\lambda(s^*), x_i(s^*), y_i), \quad (2.5)$$

$$\Pi_i^{(1)}(\varphi_i(\lambda(s^*), x_i(s^*), r_i) \Rightarrow \varphi_i^*(s_i^*, \beta_i(s^*, s^*))) = \max_{s_i \in \Omega_i} \varphi_i^*(s_i, \beta_i(s^*, s^*)). \quad (2.6)$$

Оценкой эффективности k -го периода функционирования АС является значение целевой функции $\Phi(\lambda(s^k), x(s^k), y^k)$ системы, достигаемое в этом периоде. Знание принципов выбора оценок s_i^k (2.4) и реализаций y_i^k (2.3) всех АЭ позволяет Ц определить множество решений игры АЭ и определять гарантированное значение целевой функции на этом множестве. Под решением игры АЭ в дальнейшем будем понимать устойчивое решение. Обозначим $T(\lambda, x, r) = \{T_i(\lambda, x_i, r_i)\}$, где $T_i(\lambda, x_i, r_i)$ — множество реализаций i -го АЭ, выбираемых им при заданном управлении λ и плане x_i из условия (2.3). Гарантированное значение целевой функции АС (центра) на множестве $T(\lambda, x, r)$ равно

$$\Psi(\lambda, x, r) = \min_{y \in T(\lambda, x, r)} \Phi(\lambda, x, y). \quad (2.7)$$

Теперь мы можем рассматривать только стратегии первого хода, понимая под решением игры ситуации s^* , определяемые (2.6). Обозначая $R(r)$ соответствующее множество решений, запишем гарантированное значение целевой функции АС при заданном законе управления $\pi(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$

$$\tilde{\Psi}(r) = \min_{s^* \in R(r)} \Psi(\lambda(s^*), x(s^*), r). \quad (2.8)$$

Величину (2.8) естественно сравнивать с максимально достижимым значением целевой функции АС при существующих в системе ограничениях

$$\Psi_m(r) = \max_{\substack{y \in Y(r) \\ \lambda \in L}} \Phi(\lambda, y, y). \quad (2.9)$$

Величина $\tilde{\Psi}(r)/\Psi_m(r)$ (предполагается, что $\Psi_m(r) > 0$) определяет отношение гарантированного значения целевой функции

АС в решении игры АЭ к максимально возможному. Взяв минимум по g на множестве Ω , мы получаем оценку механизма функционирования

$$K = \min_{r \in \Omega} \frac{\tilde{\Psi}(r)}{\Psi_m(r)}, \quad (2.10)$$

которую будем называть критерием эффективности функционирования Центра.

§ 3. Задачи управления АС при встречном способе формирования данных

I. Задача анализа механизма функционирования АС. Пусть задан механизм функционирования при встречном способе формирования данных $\Sigma = (W, B, \pi)$ (т. е. закон управления $\pi(s)$, множество $B(x, r)$ и целевые функции АЭ W). Необходимо определить

1. Значение критерия эффективности функционирования центра (2.10).

2. Степень искажения сообщаемой АЭ информации

$$\Delta = \max_{r \in \Omega} \max_{s^* \in R(r)} \|s^* - r\|. \quad (3.1)$$

Сообщаемую АЭ информацию будем считать достоверной, если $\Delta = 0$ (единственное решение игры $s^* = r$). Возможны и другие способы определения, например

$$\Delta = \max_{r \in \Omega} \max_{s^* \in R(r)} \frac{\|s^* - r\|}{\|r\|}.$$

3. Степень расхождения плана и реализации

$$\delta = \max_{r \in \Omega} \max_{s^* \in R(r)} \max_{y^* \in T(\lambda(s^*), x(s^*), r)} \|x(s^*) - y^*\|. \quad (3.2)$$

II. Задача выбора закона управления. Задана система стимулирования (W, B) и множество возможных законов управления G_π . Определить на множестве G_π такой закон управления, что критерий эффективности функционирования центра (2.10) достигает максимума

$$K_\pi \xrightarrow{\pi(s)} \max, \pi(s) \in G_\pi. \quad (3.3)$$

Здесь K_π значение критерия эффективности функционирования Ц при законе управления $\pi(s) \in G_\pi$.

III. Задача критериального управления. Задан закон управления $\pi(s)$ и множество возможных целевых функций АЭ G_W . Определить на множестве G_W целевые функции АЭ $W = \{W_i\}$ такие, что критерий эффективности функционирования Ц (2.10)

достигает максимума

$$K_W \xrightarrow{W} \max, \quad W \in G_W. \quad (3.4)$$

Здесь K_W значение критерия эффективности функционирования Π при наборе целевых функций АЭ $W = \{W_i\}$.

IV. Задача синтеза оптимальных механизмов функционирования при встречном способе формирования данных. Задано множество возможных механизмов функционирования G_Σ . Определить механизм функционирования такой, что критерий эффективности функционирования Π (2.10) достигает максимума

$$K_\Sigma \rightarrow \max, \quad \Sigma \in G_\Sigma. \quad (3.5)$$

Здесь K_Σ — значение критерия эффективности функционирования Π при механизме функционирования Σ .

Задание Π закона управления, способа формирования данных в АС, формирование (изменение) системы стимулирования можно понимать как формирование Π правил игры между АЭ. В этом смысле Π можно рассматривать как метаигрока, который определяет правила игры между остальными элементами системы, а задачи II—IV понимать как задачи выбора правил игры оптимальных в смысле соответствующего критерия. В этой связи задачи II—IV называют иногда задачами метаигрового управления. Можно также указать на то, что Π , выбирая свои управленческие стратегии, пытается максимизировать целевую функцию АС в устойчивых решениях игры АЭ, а не в решении игры АЭ каждой партии. Это обстоятельство может служить еще одним оправданием введения термина «метаигровое управление». В постановку задач управления II—IV можно ввести дополнительные ограничения, например, рассматривать только такие механизмы функционирования, которые обеспечивают степень искажения информации не более наперед заданного значения $\Delta \leq b$, где b заданный максимальный уровень искажения информации. В частности, можно потребовать, чтобы $\Delta = 0$. Аналогичное ограничение можно ввести и в отношении степени расхождения плана и реализации ($\delta \leq d$).

В ходе дальнейшего изложения в дополнение к (7.2.1), (7.2.2), (7.4.1) мы будем предполагать ряд свойств целевых функций W_i и множеств $Y_i(r_i)$, $B_i(x_i, r_i)$. Примем для определенности, что вектор-параметры r_i характеризуют эффективность производства

$$1. \forall x_i, \forall r_i^1, r_i^2 \in \Omega_i, r_i^1 \leq r_i^2 : B_i(x_i, r_i^1) \subset B_i(x_i, r_i^2). \quad (3.6)$$

Запись $r_i^1 \leq r_i^2$ означает, что $r_i^1 \neq r_i^2$ и $\forall j : r_{ij}^1 \leq r_{ij}^2$. Содержательная интерпретация — с повышением эффективности множество возможных реализаций при заданном плане расширяется (не сжимается).

$$2. \forall r_i^1, r_i^2 \in \Omega_i, r_i^1 \leq r_i^2 : Y_i(r_i^1) \subset Y_i(r_i^2). \quad (3.7)$$

Интерпретация аналогична данной по поводу (3.6)

$$3. \forall r_i^1, r_i^2 \in \Omega_i, r_i^1 \leq r_i^2 : \varphi_i(\lambda, x_i, r_i^1) < \varphi_i(\lambda, x_i, r_i^2), \quad (3.8)$$

т. е. при заданном плане и управлении максимальное значение целевой функции АЭ строго монотонно возрастает с увеличением эффективности.

Также везде будем предполагать, что минимум (максимум) исследуемой функции достигается и множество минимумов (максимумов) компактно. Для этого достаточно, например, потребовать непрерывности соответствующих функций по своим переменным и компактности множеств, на которых ищется минимум (максимум). При заданном механизме функционирования $\Sigma = (W, B, \pi)$ можно определить функции

$$\theta_i(r) = \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda(r), x_i(r), y_i) = \varphi_i(\lambda(r), x_i(r), r_i).$$

Механизм функционирования Σ будем называть прогрессивным, если для всех i $\theta_i(r)$ строго возрастающие функции r_i , т. е. при любых $r_i^1, r_i^2 \in \Omega_i$ и $r_i^1 > r_i^2$

$$\theta_i(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_i^1, r_{i+1}, \dots, r_n) > \theta_i(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i^2, r_{i+1}, \dots, r_n).$$

Рассмотрим прогрессивные механизмы в системе с сильными штрафами за отклонение реализации от плана. В таких системах $s \leq r$ и

$$\max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda(s), x_i(s), y_i) = f_i(\lambda(s), x_i(s), x_i(s)) = \theta_i(s).$$

Так как $\theta_i(s)$ — строго возрастающие функции s_i , то для каждого элемента существует «абсолютно оптимальная» стратегия $s_i = r_i$ при любых стратегиях других АЭ.

Аналогичный вывод имеет место и для прогрессивных механизмов в системе с сильными штрафами за искажение информации. Действительно, в таких системах $y_i \in B_i(x_i, s_i)$ и

$$\begin{aligned} \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda(s), x_i(s), y_i) &= \max_{y_i \in B_i(x_i, s_i)} f_i(\lambda(s), x_i(s), y_i) = \\ &= \varphi_i(\lambda(s), x_i(s), s_i) = \theta_i(s). \end{aligned}$$

Для обоих случаев критерий эффективности функционирования центра

$$K_\Sigma = \min_{r \in \Omega} \frac{\Psi[\lambda(r), x(r), r]}{\Psi_m(r)}. \quad (3.9)$$

§ 4. Задачи управления АС при адаптивном способе формирования данных

При адаптивном способе формирования данных оценки $a^k = \{a_i^k\}$ параметров $r = \{r_i\}$ в k -м периоде функционирования Ц строит с помощью некоторой процедуры (оператора адаптивного формирования данных) исходя из оценок и реализаций в предшествующих периодах. Будем рассматривать для определенности оператор адаптивного формирования данных

$$a_i^k = \sigma_i(a_i^{k-1}, y_i^{k-1}) \quad (4.1)$$

(оценка a_i^k строится исходя из оценки a_i^{k-1} и реализации y_i^{k-1} предшествующего периода функционирования АС). Будем предполагать следующие свойства оператора $\sigma = \{\sigma_i\}$:

$$1. a_i^k = \sigma_i(a_i^{k-1}, y_i^{k-1}) \geq a_i^{k-1}. \quad (4.2)$$

Содержательно это означает, что если в k -м периоде функционирования на основе оценки a_i^{k-1} и проявленной реализации y_i^{k-1} было установлено множество возможных реализаций $Y_i(a_i^k)$, то в последующих периодах функционирования оно «не сжимается»;

$$2. r_i \geq a_i^k = \sigma_i(a_i^{k-1}, y_i^{k-1}), \quad (4.3)$$

т. е. оператор адаптивного формирования дает оценку, не превышающую истинной;

$$3. \text{ Если } y_i^{k-1} \in B_i(x_i^{k-1}, a_i^{k-1}), \text{ то } a_i^k = \sigma_i(a_i^{k-1}, y_i^{k-1}) = a_i^{k-1}. \quad (4.4)$$

Это означает, что реализация y_i^{k-1} , принадлежащая оценке множества реализуемых планов в периоде $(k-1)$, не добавляет новой информации о параметрах r_i ;

$$4. y_i^{k-1} \in X_i(\sigma_i(a_i^{k-1}, y_i^{k-1})) = X_i(a_i^k), \quad (4.5)$$

т. е., если в $(k-1)$ периоде АЭ была выбрана реализация y_i^{k-1} , то построенное центром в k -м периоде функционирования множество реализуемых планов АЭ $X_i(a_i^k)$ содержит реализацию y_i^{k-1} .

Критерий эффективности i -го АЭ, учитывающий будущие периоды функционирования в форме (7.3.1) при адаптивном способе формирования данных

$$W_i^k = f_i(\lambda(a^k), x_i(a^k), y_i^k) + \sum_{q=k+1}^{k+Ni} f_i(\lambda(a^q), x_i(a^q), y_i^q). \quad (4.6)$$

Стратегией АЭ при адаптивном способе является значение реализации, выбираемое на этапе реализации. Неполная информированность АЭ при выборе реализации y_i^k связана с незнанием реализаций y_j^k других АЭ, а также реализаций $y^q = \{y_j^q\}$, ($q \geq (k+1)$) всех

АЭ в будущих периодах функционирования. Заметим, что влияние реализации y_i^k на будущее проявляется через оценку $a_i^{k+1} = \sigma_i(a_i^k, y_i^k)$. Обозначим $\tilde{B}_i(x_i, a_i^{k+1}, a_i^k)$ множество реализаций $y_i^k \in B_i(x_i, r_i)$ таких, что $\sigma_i(a_i^k, y_i^k) = a_i^{k+1}$. Выбор любой реализации y_i^k из этого множества дает оценку a_i^{k+1} в периоде $(k+1)$. Очевидно, что при фиксированном значении a_i^{k+1} АЭ выберет реализацию y_i^k из условия

$$\begin{aligned} f_i(\lambda^k, x_i^k, y_i^k) &= \max_{z_i \in \tilde{B}_i(x_i^k, a_i^{k+1}, a_i^k)} f_i(\lambda^k, x_i^k, z_i) = \\ &= \varphi_i(\lambda(a^k), x_i(a^k), a_i^k, a_i^{k+1}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Примем, что $\tilde{B}_i(x_i, a_i^{k+1}, a_i^k) \neq \emptyset$ для любых $a_i^k \leq a_i^{k+1} \leq r_i$. Таким образом, можно рассматривать в качестве стратегии АЭ в периоде k оценку $a_i^{k+1} = \sigma_i(a_i^k, y_i^k)$, восстанавливая стратегию y_i^k из условия (4.7). Выражая критерий эффективности (4.6) через оценки $\{a_i^q, q = (k+1) \div (k+N_i)\}$, получим

$$W_i^k = \sum_{q=k}^{k+N_i-1} \varphi_i(\lambda(a^q), x_i(a^q), a_i^q, a_i^{q+1}) + \varphi_i(\lambda(a^{k+N_i}), x_i(a^{k+N_i}), r_i), \quad (4.8)$$

где $a_i^{q-1} \leq a_i^q \leq r_i, q = (k+1) \div (k+N_i)$.

Игра, описывающая функционирование АС в этом случае является игрой с «зависимыми» партиями. Соответствующий принцип выбора рациональных стратегий описывается схемой (1.7) и применительно к конкретному виду (4.8) критерия эффективности может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{q=k}^{k+N_i-1} \varphi_i(\lambda(a^q), x_i(a^q), a_i^q, a_i^{q+1}) + \varphi_i(\lambda(a^{k+N_i}), x_i(a^{k+N_i}), r_i) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_i^*(a_i^{k+1}, \beta_i(a^{k+1}, a^k)) \xrightarrow{a_i^{k+1}} \max. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Множеством устойчивых оценок при адаптивном способе формирования данных называется множество R_a оценок a^* таких, что $\forall a^* \in R_a$:

$$\varphi_i^*(a^*, \beta_i(a^*, a^*)) = \max_{a_i^* \leq a_i^{k+1} \leq r_i} \varphi_i^*(a_i^{k+1}, \beta_i(a^*, a^*)). \quad (4.10)$$

Возвращаясь к стратегиям y_i^k , мы можем определить множество устойчивых решений R как множество ситуаций y^* таких, что

$$\forall y^* \in R \exists a^* \in R_a$$

$$\begin{aligned} f_i(\lambda(a^*), x_i(a^*), y_i^*) &= \max_{z_i \in B_i(x_i, a_i^*)} f_i(\lambda(a^*), x_i(a^*), z_i) = \\ &= \varphi_i(\lambda(a^*), x_i(a^*), a_i^*). \end{aligned} \quad (4.11)$$

В данном случае мы вместо множества $B_i(x_i, a_i^*, a_i^*)$ написали множество $B_i(x_i, a_i^*)$ по следующей причине. Так как $a_i^* = \sigma_i(a_i^*, y_i^*)$, то $y_i^* \in B_i(x_i, a_i^*)$. Действительно, в силу свойств оператора адаптивного формирования данных оценка $a_i^{k+1} = a_i^k$ в том и только в том случае, когда $y_i^k \in B_i(x_i^k, a_i^k)$.

Приведем примеры правил рационального выбора стратегий АЭ.

Пример 1. АЭ считает, что оценки остальных АЭ сохраняются неизменными в будущие периоды функционирования, т. е. $a_j^q = a_j^k$ ($j \neq i, q \geq k+1$). Выбирая оценку a_i^{k+1} , АЭ предполагает сохранить ее в течение будущих периодов, т. е. $a_i^q = a_i^{k+1}$ ($q \geq k+2$). Принцип выбора рациональных стратегий в этом случае

$$\sum_{q=k}^{k+N_i-1} \varphi_i[\lambda(a^q), x_i(a^q), a_i^q, a_i^{q+1}] + \varphi_i[\lambda(a^{k+N_i}), x_i(a^{k+N_i}), r_i] \Rightarrow$$

$$\Pi_i$$

$$\Rightarrow \varphi_i[\lambda(a^k), x_i(a^k), a_i^k, a_i^{k+1}] + (N_i - 1) \varphi_i[\lambda(a^{k+1}), x_i(a^{k+1}), a_i^{k+1}] +$$

$$+ \varphi_i[\lambda(a^{k+1}), x_i(a^{k+1}), r_i] \xrightarrow{a_i^{k+1}} \max, \quad (4.12)$$

где $a^{k+1} = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_{i-1}^k, a_i^{k+1}, a_{i+1}^k, \dots, a_n^k)$, $a_i^k \leq a_i^{k+1} \leq r_i$. Устойчивые оценки, согласно (4.10), определяются как оценки a^* такие, что

$$N_i \varphi_i[\lambda(a^*), x_i(a^*), a_i^*] + \varphi_i[\lambda(a^*), x_i(a^*), r_i] =$$

$$= \max_{a_i^* \leq a_i^{k+1} \leq r_i} \{ \varphi_i[\lambda(a^*), x_i(a^*), a_i^*, a_i^{k+1}] +$$

$$+ (N_i - 1) \varphi_i[\lambda(a^{k+1}), x_i(a^{k+1}), a_i^{k+1}] + \varphi_i[\lambda(a^{k+1}), x_i(a^{k+1}), r_i] \}.$$

$$(4.13)$$

Если в качестве критерия эффективности АЭ с учетом будущих периодов функционирования принять выражение (7.3.2), то рассмотренное правило рационального выбора стратегий запишется в более простом виде

$$\varphi_i[\lambda(a^k), x_i(a^k), a_i^k, a_i^{k+1}] + N_i \varphi_i[\lambda(a^{k+1}), x_i(a^{k+1}), a_i^{k+1}] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{a_i^{k+1}} \max, \quad a_i^k \leq a_i^{k+1} \leq r_i, \quad (4.14)$$

$$\text{где } N_i = \frac{\delta_i}{1 - \delta_i}.$$

Соответственно устойчивые оценки определяются как оценки a^* такие, что

$$(N_i + 1) \varphi_i[\lambda(a^*), x_i(a^*), a_i^*] = \max_{a_i^* \leq a_i^{k+1} \leq r_i} [\varphi_i(\lambda(a^*), x_i(a^*), a_i^*, a_i^{k+1}) + N_i \varphi_i(\lambda(a^{k+1}), x_i(a^{k+1}), a_i^{k+1})]. \quad (4.15)$$

Пример 2. Каждый АЭ считает неизменными в будущие периоды оценки всех остальных АЭ, но не свои. Для определения a_i^{k+1} АЭ решает задачу определения последовательности $\{a_i^q\}$, обеспечивающей максимум величины

$$\sum_{q=k}^{k+N_i-1} [\lambda(a^q), x_i(a^q), a_i^q, a_i^{q+1}] + \varphi_i[\lambda(a^{k+N_i}), x_i(a^{k+N_i}), r_i],$$

где $a^q = (a_1^q, a_2^q, \dots, a_{i-1}^q, a_i^q, a_{i+1}^q, \dots, a_n^q)$, $a_i^{q-1} \leq a_i^q \leq r_i$. Первый член a_i^{k+1} этой последовательности и определяет стратегию y_i^k из условия (4.7).

В качестве критерия эффективности функционирования Ц при адаптивном способе формирования данных можно принять, как и ранее, относительное гарантированное значение целевой функции АС на множестве устойчивых решений игры АЭ. Для его определения обозначим $R(a^*)$ — множество ситуаций y^* , определяемых условиями (4.11), $R_a(r)$ — множество устойчивых оценок a^* , определяемое условиями (4.10), и, наконец,

$$\tilde{\Psi}(r) = \min_{a^* \in R_1(r)} \min_{y^* \in R(a^*)} \Phi[\lambda(a^*), x(a^*), y^*].$$

Теперь в качестве критерия эффективности функционирования Ц при адаптивном способе формирования данных можно принять, как и ранее, величину

$$K = \min_{r \in \Omega} \frac{\tilde{\Psi}(r)}{\Psi_m(r)} \quad (4.16)$$

и поставить задачи управления в АС при адаптивном способе формирования данных, полностью повторяя формальные постановки задач I—IV.

Остановимся на следующем вопросе. Вообще говоря, множество устойчивых оценок, определяемое (4.10), а следовательно, и множество устойчивых решений, определяемое (4.11), может зависеть от степеней дальновидности $\{N_i\}$ элементов. В этом случае следует определять гарантированный результат по множеству возможных значений степеней дальновидности элементов. Заметим, что, как правило, гарантированный результат достигается при бесконечных значениях степеней дальновидности АЭ. В этом случае условия (4.13), (4.15), определяющие устойчивые оценки, принимают более простой вид

$$\varphi_i[\lambda(a^*), x_i(a^*), a_i^*] = \max_{a_i^* \leq a_i \leq r_i} \varphi_i[\lambda(a), x_i(a), a_i],$$

$$a = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_{i-1}^*, a_i, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*), \quad (4.17)$$

Особый интерес в случае адаптивного способа формирования данных представляют прогрессивные механизмы функционирования. Действительно, для любого прогрессивного механизма максимум в условиях (4.17) (а также в условиях (4.13) при достаточно большом N_i и в условиях (4.15)) достигается в единственной точке $a_i^* = r_i$. Следовательно, для этих случаев единственной устойчивой оценкой является достоверная оценка r_i для всех АЭ. Поэтому выбор реализации y_i^k в любом периоде функционирования производится из условия максимума $f_i(\lambda, x_i, y_i)$ на всем множестве $B_i(x_i, r_i)$ возможных реализаций. Критерий эффективности функционирования центра (4.16) в этом случае совпадает с критериями эффективности для случая сильных штрафов за отклонение реализации от плана и за искажение информации (3.9). Таким образом, применение адаптивного способа формирования данных в случае прогрессивных механизмов дает примерно такой же эффект, как введение сильных штрафов при встречном способе формирования данных (естественно, этот вывод справедлив при соответствующих правилах рационального выбора стратегий).

Глава IX

ЗАДАЧА ВЫБОРА

ОПТИМАЛЬНОГО ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

В данной главе рассматривается задача выбора закона управления при встречном способе формирования данных. Доказывается ряд результатов относительно законов открытого управления и оптимального планирования. Определяются условия, которые обеспечивают совпадение реализации с планом, достоверность сообщаемой информации, оптимальность законов управления.

§ 1. Гипотеза слабого влияния

Рассмотрим ситуации равновесия по Нэшу в качестве устойчивых решений игры АЭ. Запишем условие равновесия по Нэшу в АС с критериями эффективности элементов (8.2.3). Набор стратегий $s^* = \{s_i^*\}$ называется равновесным по Нэшу, если

$$\varphi_i(\lambda(s^*), x_i(s^*), r_i) = \max_{s_i \in \Omega_i} \varphi_i(\lambda(s^*(i)), x_i(s^*(i)), r_i), \quad (1.1)$$

где $s^*(i) = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$.

Определение ситуаций равновесия (1.1) и анализ их свойств в общем случае — довольно сложная задача. Сформулируем следующую гипотезу слабого влияния как гипотезу о поведении элементов: каждый элемент не учитывает влияние сообщаемой им оценки s_i на управление $\lambda(s)$. Ситуация равновесия при гипотезе слабого влияния (если она существует) определяется условиями

$$\varphi_i(\lambda^*, x_i(s^*), r_i) = \max_{s_i \in \Omega_i} \varphi_i(\lambda^*, x_i(s^*(i)), r_i), \quad (1.2)$$

где $\lambda^* = \lambda(s^*)$. Заметим, что ситуация, определяемая (1.2), уже не является точкой Нэша в смысле (1.1). С другой стороны, ситуация, определяемая (1.1), не является в общем случае равновесной при принятой выше гипотезе поведения. Ситуацию, определяемую (1.2), будем называть *точкой Нэша при гипотезе слабого влияния* или просто ситуацией равновесия, если известно, что имеет место гипотеза слабого влияния.

Основанием для введения гипотезы слабого влияния служат следующие обстоятельства. При достаточно большом числе предприятий и отсутствии монопольного эффекта в отрасли, факт

слабого влияния отдельного предприятия на параметры управления, общие для всех предприятий отрасли (цены, нормативы) хорошо известен.

Для дальнейшего нам потребуется

Л е м м а 9.1.

$$\max_{x_i \in R_+^{p_i}} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \max_{x_i \in X_i(r_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i). \quad (1.3)$$

Здесь p_i — размерность вектора x_i , $R_+^{p_i}$ — положительный ортант p_i -мерного евклидова пространства.

Доказательство. Обозначим через $D_i(\lambda, r_i)$ множество реализаций y_i^* , совпадающих с планом $x_i^* = y_i^*$ таких, что

$$f_i(\lambda, x_i^*, y_i^*) = f_i(\lambda, y_i^*, y_i^*) = \max_{y_i \in Y_i(r_i)} f_i(\lambda, y_i, y_i). \quad (1.4)$$

Пусть x_i' — некоторый произвольный план i -го АЭ, $x_i' \notin D_i(\lambda, r_i)$, а y_i' — любая реализация, дающая максимум целевой функции i -го АЭ при плане x_i'

$$f_i(\lambda, x_i', y_i') = \max_{y_i \in B_i(x_i', r_i)} f_i(\lambda, x_i', y_i).$$

Докажем, что

$$f_i(\lambda, y_i^*, y_i^*) = \max_{y_i \in Y_i(r_i)} f_i(\lambda, y_i, y_i) > f_i(\lambda, x_i', y_i'). \quad (1.5)$$

Если $y_i' = x_i' \notin D_i(\lambda, r_i)$, то (1.5) очевидно. Пусть $y_i' \neq x_i'$ и (1.5) не имеет места

$$\max_{y_i \in Y_i(r_i)} f_i(\lambda, y_i, y_i) \leq f_i(\lambda, x_i', y_i') < f_i(\lambda, y_i', y_i'). \quad (1.6)$$

Второе неравенство в этой цепочке имеет место в силу свойства (7.2.2) целевой функции АЭ. Видно, что (1.6) противоречиво, что доказывает (1.5). Далее можно записать по определению функции φ_i

$$\max_{x_i \in X_i(r_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \max_{x_i \in X_i(r_i)} \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda, x_i, y_i).$$

Очевидно, что любая точка $(x_i = y_i^*, y_i = y_i^*)$ принадлежит множеству $\{x_i, y_i\} = \{x_i \in X_i(r_i), y_i \in B_i(x_i, r_i)\}$, поэтому в силу (1.5)

$$\max_{x_i \in X_i(r_i)} \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda, x_i, y_i) = f_i(\lambda, y_i^*, y_i^*) \geq f_i(\lambda, x_i', y_i'). \quad (1.7)$$

Лемма доказана.

Важное следствие. Достаточным условием существования для закона управления $\pi(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$ равновесия по Нэшу при гипотезе слабого влияния (1.2) является существование точки s^* такой, что управление $\lambda^* = \lambda(s^*)$ и план $x^* = x(s^*)$ удовлетво-

ряют условиям

$$\varphi_i(\lambda^*, x_i^*, r_i) = \max_{x_i \in X_i(r_i)} \varphi_i(\lambda^*, x_i, r_i). \quad (1.8)$$

Действительно, для любой ситуации s

$$\varphi_i(\lambda^*, x_i(s), r_i) \leq \max_{x_i \in R_+^{p_i}} \varphi_i(\lambda^*, x_i, r_i).$$

Отсюда, в силу леммы 9.1, следует приведенное утверждение.

§ 2. Класс G^1 законов управления Анализ законов открытого управления

Будем считать, что закон управления принадлежит классу G^1 , если

а) существует хотя бы одна ситуация равновесия по Нэшу при гипотезе слабого влияния;

б) любая ситуация равновесия по Нэшу при гипотезе слабого влияния удовлетворяет (1.8).

Важное свойство законов управления из класса G^1 устанавливает следующая теорема.

Теорема 9.1. Если закон управления $\pi(s)$ принадлежит классу G^1 , то в ситуации равновесия s^* для каждого элемента реализация y_i^* совпадает с планом $x_i(s^*)$.

Доказательство. В силу (1.7) для любой ситуации равновесия s^*

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda(s^*), x_i(s^*), r_i) &= \max_{x_i \in X_i(r_i)} \varphi_i(\lambda(s^*), x_i, r_i) = \\ &= \max_{x_i \in X_i(r_i)} \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda, x_i, y_i) = f_i(\lambda, y_i^*, y_i^*), \end{aligned} \quad (2.1)$$

т. е. в ситуации равновесия $x_i(s^*) = y_i^*$. Теорема доказана.

В классе законов G^1 особое место занимают законы открытого управления (ОУ). Это обусловлено свойствами законов ОУ, которые устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 9.2. Для закона ОУ ситуация $s^* = g$ является равновесием вида (1.8).

Доказательство. Ввиду следствия леммы 9.1, если существует s^* такая, что выполняется (1.8), то s^* ситуация равновесия. Для закона ОУ (1.8) выполняется при $s^* = g$. Теорема доказана.

Следствие 1. Закон ОУ принадлежит классу G^1 (в предположении гипотезы слабого влияния). То есть, для закона ОУ существует ситуация равновесия (1.8), и любая ситуация равновесия удовлетворяет (1.8).

Доказательство. Существование ситуации равновесия (1.8) для закона ОУ следует из теоремы 9.2. Нужно доказать, что лю-

бая ситуация равновесия для закона ОУ имеет вид (1.8). Докажем это от противного. Пусть s^* ситуация равновесия такая, что s^* удовлетворяет (1.2), но не удовлетворяет (1.8), т. е. $\exists i: x_i(s^*) \notin D_i(\lambda, r_i)$ (обозначения взяты из доказательства леммы 9.1). Рассмотрим следующую ситуацию $s^1 = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, r_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$. Докажем, что для закона ОУ

$$\varphi_i(\lambda^*, x_i(s^1), r_i) > \varphi_i(\lambda^*, x_i(s^*), r_i) \quad (2.2)$$

и, следовательно, s^* не является ситуацией равновесия. Можно записать

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda^*, x_i(s^1), r_i) &= \max_{x_i \in X_i(r_i)} \varphi_i(\lambda^*, x_i, r_i) = \\ &= \max_{x_i \in X_i(r_i)} \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda^*, x_i, y_i) = \max_{y_i \in Y(r_i)} f_i(\lambda^*, y_i, y_i) = \\ &= f_i(\lambda^*, y_i^*, y_i^*) > f_i(\lambda^*, x_i(s^*), y_i^*) = \\ &= \max_{y_i \in B_i(x_i(s^*), r_i)} f_i(\lambda^*, x_i(s^*), y_i) = \varphi_i(\lambda^*, x_i(s^*), r_i). \end{aligned}$$

Первое равенство в этой цепочке следует из определения закона ОУ; второе — в силу определения функции φ_i ; третье — рассматривалось в доказательстве леммы 9.1; доказательство строгого неравенства, стоящего в этой цепочке, проведено в лемме 9.1; следующие дальше преобразования вытекают из определения функции φ_i .

Следствие 2. Если существует единственная ситуация равновесия для закона ОУ, то она имеет вид $s^* = g$.

Теорема 9.3. Пусть для закона ОУ существует единственная ситуация равновесия. Тогда он является оптимальным решением задачи выбора закона управления (8.3.3) в классе G^1 , т. е.

$$\forall \pi \in G^1 : K_{\text{оп}} \geq K_{\pi}.$$

Доказательство. Пусть ситуация равновесия для закона ОУ единственная. Тогда в силу следствия 2 $s^* = g$ и, кроме того, $x(s^*) = y^*$, где y^* определяется условиями (2.1). Гарантированное значение целевой функции АС на множестве оптимальных реализаций $A \ni T(\lambda(s), x(s), r)$

$$\Psi(\lambda, x, r) = \min_{y \in T(\lambda, x, r)} \Phi(\lambda, x, y),$$

и в ситуации равновесия $s^* = g$ для закона ОУ

$$\Psi(\lambda(r), x(r), r) = \max_{\lambda \in L, y \in D(\lambda, r)} \Phi(\lambda, y, y), \quad (2.3)$$

где $D(\lambda, r) = \bigcap_i D_i(\lambda, r_i)$.

В этой записи используются два условия. Во-первых, для любого закона $\pi \in G^1$ в ситуации равновесия множество оптимальных

реализаций $T(\lambda(s), x(s), r)$ состоит из единственной точки $y^* = x(s^*)$. Поэтому при определении гарантированного значения целевой функции АС операцию взятия минимума на множестве $T(\lambda, x, r) = \{T_i(\lambda(s), x_i(s), r_i)\}$ можно опустить. Во-вторых, для закона ОУ в ситуации равновесия $s^* = r$ условие равновесия (1.8) и условие согласования (7.8.5) совпадают.

Рассмотрим теперь любой закон $\pi \in G^1$ и пусть s_{π}^* ситуация равновесия при этом законе управления. Значение целевой функции АС в ситуации равновесия $\Phi(\lambda_{\pi}^*, u_{\pi}^*, y_{\pi}^*)$, где $\lambda_{\pi}^* \in L$, $y_{\pi}^* \in D(\lambda, r)$, очевидно, не превышает

$$\max_{\lambda \in L, y \in D(\lambda, r)} \Phi(\lambda, y, y),$$

что совпадает с (2.3). Теорема доказана.

В следствии 2 теоремы 9.2 и теореме 9.3 существенно используется единственность ситуации равновесия. В связи с этим интересно определить достаточные условия единственности ситуации равновесия (1.8) для закона ОУ.

Обозначим через $A_i(\lambda, s_i)$ множество согласованных планов i -го АЭ при управлении λ и оценке s_i .

Условием равноправия функций предпочтения АЭ будем называть следующее условие:

$$\forall s_i^1, s_i^2 \in \Omega_i, s_i^1 \neq s_i^2, \forall \lambda \in L : A_i(\lambda, s_i^1) \cap A_i(\lambda, s_i^2) = \emptyset. \quad (2.4)$$

Содержательно оно означает, что для любых несовпадающих оценок соответствующие множества согласованных планов АЭ не имеют пересечений.

Теорема 9.4. Если выполняется условие равноправия функций предпочтения (2.4) для всех АЭ, то для закона ОУ $s^* = r$ — единственная ситуация равновесия (докажите самостоятельно).

С л е д с т в и е. Пусть $\forall \lambda \in L, \forall s_i \in \Omega_i$ функция предпочтения каждого АЭ имеет единственный максимум в точке $x_i = x_i(\lambda, s_i)$, причем $x_i(\lambda, s_i^1) \neq x_i(\lambda, s_i^2)$, $(s_i^1 \neq s_i^2)$. Тогда $s^* = r$ — единственная ситуация равновесия. Справедливость следствия следует из выполнения условия равноправия функций предпочтения для каждого АЭ системы.

Достаточные условия единственности ситуации равновесия в общем случае можно получить, вводя в целевые функции элементов штрафы за искажение информации. Будем предполагать, что если на этапе формирования данных АЭ сообщают недостоверную информацию, то на этапе реализации плана центр всегда может это определить. В этом случае элементы всегда несут потери при сообщении недостоверной информации.

Теорема 9.5. Если в АС введены штрафы за искажение информации, то для закона ОУ $s^* = r$ — единственная ситуация равновесия при гипотезе слабого влияния.

Доказательство теоремы предлагаем провести самостоятельно.

Отметим, что в условии теоремы ничего не говорится о «силе штрафов». Поэтому достаточным условием единственности ситуации равновесия для закона ОУ являются слабые штрафы, которые практически всегда присутствуют в системе, например в виде чисто морального стимула сообщать достоверную информацию при прочих равных условиях.

Выпишем теперь значение целевой функции АС для закона ОУ в ситуации равновесия $s^* = \gamma$ (выражение взято из доказательства теоремы 9.3):

$$\Psi(\lambda(s^*), x(s^*), \gamma) = \max_{\substack{\lambda \in L \\ x \in D(\lambda, \gamma)}} \Psi(\lambda, x, \gamma).$$

Легко видеть, что из-за условий согласования и равновесия (которые в данном случае совпадают) закон ОУ в ситуации равновесия $s^* = \gamma$ не обеспечивает в общем случае максимально возможное значение целевой функции

$$\Psi_m(\gamma) = \max_{\substack{\lambda \in L \\ x \in X(\gamma) \\ x=y}} \Psi(\lambda, x, \gamma) = \max_{\substack{\lambda \in L \\ y \in Y(\gamma)}} \Phi(\lambda, y, y)$$

и, следовательно, не обеспечивает абсолютно оптимального значения критерия эффективности функционирования центра $K=1$. Обозначим через $\Psi_c(s)$ ($\Psi_m(s)$) значение целевой функции АС при наборе оценок $s = \{s_i\}$ в оптимальном решении задачи согласованного планирования (7.8.3) ÷ (7.8.5) (задачи оптимального планирования (7.8.3), (7.8.4)). Определим *коэффициент согласования* (считаем, что $\Psi_m(s) > 0$) $\rho_c(s) = \Psi_c(s)/\Psi_m(s) \leq 1$.

Закон СУ называется эписогласованным, если для него коэффициент согласования $\rho_c(s) = 1$ для всех $s \in \Omega$. Содержательно условие эписогласованности закона ОУ означает «согласованность» целей системы и элементов системы. Если цели системы и подсистем «согласованы плохо», то представляется естественным «подправить» целевые функции подсистем, что можно понимать как задачу критериального управления (см. гл. VIII).

Теорема 9.6. Пусть закон ОУ удовлетворяет условиям теоремы 9.3. Для того чтобы он был абсолютно оптимальным (т. е., $K_{\text{от}} = 1$), необходимо и достаточно, чтобы он был эписогласованным (докажите самостоятельно).

Таким образом, законы ОУ в ситуации равновесия при гипотезе слабого влияния:

1) обеспечивают совпадение назначаемого Ц плана и выбранной АЭ реализации;

2) в предположении, что задача оптимального согласованного планирования (7.8.3) — (7.8.5) имеет решение, обеспечивают существование ситуации равновесия;

3) при наличии слабых штрафов за искажение информации, что в силу приведенных выше соображений можно, как правило, предполагать, обеспечивают единственность ситуации равновесия. Другое достаточное условие единственности ситуации равновесия формулирует теорема 9.4;

4) при выполнении 3) обеспечивают достоверность сообщаемых АЭ данных и являются оптимальными законами управления в классе G^+ ;

5) при хорошем согласовании (эписогласовании) целей АЭ и АС обеспечивают абсолютно оптимальное функционирование АС.

Здесь можно отметить еще одно интересное обстоятельство. Построение законов ОУ (см. главу VII) требует определения функций предпочтения АЭ $\varphi_i(\lambda, x_i, s_i)$, что в свою очередь предполагает следующую процедуру. Центр прогнозирует выбираемые АЭ реализации

$$f_i(\lambda, x_i, y_i^{\text{пп}}) = f_i(\lambda, x_i, \xi_i(\lambda, x_i, s_i)) = \max_{z_i \in B_i(x_i, s_i)} f_i(\lambda, x_i, z_i).$$

Подставляя прогнозируемое значение реализаций в целевые функции АЭ, он получает

$$f_i(\lambda, x_i, \xi_i(\lambda, x_i, s_i)) = \varphi_i(\lambda, x_i, s_i), \quad (2.5)$$

т. е. соответствующие функции предпочтения. Для законов ОУ приведенные выше результаты (теоремы 9.1—9.6) остаются справедливыми, если центр в качестве функций предпочтения АЭ будет брать

$$f_i(\lambda, x_i, x_i) = \tilde{\varphi}_i(\lambda, x_i). \quad (2.6)$$

Это связано с тем, что для функций предпочтения (2.5) условие согласования имеет вид

$$\varphi_i(\lambda, x_i, s_i) = \max_{z_i \in X_i(s_i)} \varphi_i(\lambda, z_i, s_i) = \max_{z_i \in X_i(s_i)} f_i(\lambda, z_i, z_i). \quad (2.7)$$

Справедливость последнего равенства в цепочке (2.7) можно показать по аналогии с доказательством аналогичного равенства (1.7). В свою очередь условие согласования для функций предпочтения (2.6)

$$\tilde{\varphi}_i(\lambda, x_i) = \max_{z_i \in X_i(s_i)} \tilde{\varphi}_i(\lambda, z_i) = \max_{z_i \in X_i(s_i)} f_i(\lambda, z_i, z_i), \quad (2.8)$$

что совпадает с (2.7). Таким образом, законы ОУ с функциями предпочтения (2.5) эквивалентны законам СУ с функциями предпочтения (2.6).

§ 3. Случай непланируемых реализаций и целевых функций АЭ без штрафов по ряду компонент

Описанную в главе VII модель АС, постановки задач управления в главе VIII и результаты предыдущего параграфа можно обобщить в следующем направлении. Предположим, что для части компонент вектор-реализаций Ц не задает плана, либо не вводит штрафы за несовпадение плана и реализации.

Рассмотрим сначала случай, когда по части компонент векторов-реализаций Ц не задает плана, т. е. по указанным компонентам целевые функции АЭ и АС зависят только от реализаций. Планируемые компоненты вектор-реализации i -го АЭ будем обозначать как y_i^n (соответственно план x_i^n), а непланируемые компоненты как $y_i^{n..n}$. Используя эти обозначения, целевые функции АЭ и АС можем соответственно представить как

$$f_i(\lambda, x_i^n, y_i^n, y_i^{n..n}), \quad \Phi(\lambda, x^n, y^n, y^{n..n}).$$

Множеством реализуемых планов $X_i^n(r_i)$ будем называть множество планов x_i^n таких, что

$$\forall x_i^n \in X_i^n(r_i) \exists y_i = (y_i^n, y_i^{n..n}) \in B_i(x_i^n, r_i) : y_i^n = x_i^n.$$

Соответственно вводится и множество реализуемых планов системы в целом. Чтобы распространить приведенные выше постановки задач управления на этот случай, можно воспользоваться следующим формальным приемом. Будем предполагать, что для каждого АЭ реализации $y_i^{n..n}$ также планируется, т. е. центр задает соответствующий план $x_i^{n..n}$. Тогда множество реализуемых планов $X_i^n(r_i)$ можно расширить до множества $X_i(r_i) = Y_i(r_i)$, а множество реализуемых планов АС в целом $X^n(r)$ расширить до $X(r) = Y(r)$. Множество возможных реализаций i -го АЭ при плане $x_i = (x_i^n, x_i^{n..n}) : B_i(x_i, r_i)$ по-прежнему не зависит от плана $x_i^{n..n}$, т. е. $B_i(x_i, r_i) = B_i(x_i^n, r_i)$.

Условие (7.2.2) теперь необходимо заменить на следующее:

$$f_i(\lambda, x_i, y_i) \leq f_i(\lambda, y_i, y_i), \quad (3.1)$$

причем $f_i(\lambda, x_i, y_i) = f_i(\lambda, y_i, y_i)$, если $x_i^n = y_i^n$, и $f_i(\lambda, x_i, y_i) < f_i(\lambda, y_i, y_i)$, если $x_i^n \neq y_i^n$.

Таким образом, мы приходим к описанной выше модели АС и постановкам задач управления с той лишь разницей, что условие (7.2.2) заменено на (3.1). С учетом этого можно доказать теорему, обобщающую теорему 9.1.

Теорема 9.7. Если в АС закон управления принадлежит классу G^1 , то в ситуации равновесия s^* для каждого элемента реализация y_i^n совпадает с планом $x_i^n(s^*)$.

Формулировки теорем 9.2—9.6 остаются без изменений.

Рассмотрим теперь случай, когда есть такие компоненты вектор-реализаций АЭ, для которых определяются их плановые значения, но в целевые функции АЭ не введены штрафы за от-

клонение реализации от плана. Если по соответствующим компонентам штрафы не введены и в целевую функцию АС, то остаются справедливыми все выводы, сделанные для АС с частично планируемой реализацией АЭ. Если же в целевую функцию АС введены штрафы по тем компонентам вектор-реализаций, по которым АЭ не штрафуются, то ситуация меняется. Поскольку для тех компонент, по которым не введены штрафы за искажение реализации от плана, принадлежность закона управления классу G^1 уже не обеспечивает в общем случае совпадения плана и реализации, то Ц может нести от этого потери. Это может привести к невыполнению теорем 9.1, 9.3 и 9.6.

§ 4. О централизованном и децентрализованном управлении в АС

Важным направлением в теории активных систем представляется применение развиваемого в рамках этой теории подхода к исследованию иерархических активных систем с различной степенью централизации управления и решение задачи о выборе оптимальной степени централизации управления. В методологическом плане не менее важной представляется возможность единого подхода в рамках теории АС к иерархическим системам с различной степенью централизации управления (см. гл. II). Предельным случаем централизации управления является *полностью централизованная система*, в которой центр устанавливает управление λ и план $x = \{x_i\}$, причем размерность x_i совпадает с y_i (полностью планируемая реализация) и, кроме того, реализация совпадает с планом ($y=x$). В данном случае формально пропадает различие между планом и управлением, поскольку то и другое устанавливается центром, а реализация совпадает с планом. Предельным случаем децентрализации управления является *полностью децентрализованная система* (рыночная система), в которой управление λ (например, цены) и план x_i центром не устанавливаются, а выбираются самим АЭ (т. е. наряду с y_i появляется реализация управления μ_i). Отметим, что в этом случае также стирается формальное различие между реализацией плана и реализацией управления, поскольку то и другое выбирается АЭ. Далее мы ограничимся исследованием систем, в которых управление λ устанавливается централизованно (АЭ не имеют права его менять) и планируются все компоненты вектор-реализации.

Для формального определения степени централизации рассмотрим две системы стимулирования (W^1, B^1) и (W^2, B^2) . Пусть для всех допустимых λ, x имеет место

1. $f_i^1(\lambda, y_i, y_i) = f_i^2(\lambda, y_i, y_i)$ ($y_i \in Y_i(r_i)$) (при совпадении плана и реализации системы стимулирования неразличимы);

2. $B_i^2(x_i, r_i) \subset B_i^1(x_i, r_i)$;

3. $f_i^2(\lambda, x_i, y_i) \leq f_i^1(\lambda, x_i, y_i)$, ($y_i \in B_i^2(x_i, r_i)$).

В этом случае будем говорить, что система стимулирования (W^2, B^2) имеет большую степень централизации, чем (W^1, B^1) ($(W^2, B^2) \succ (W^1, B^1)$). Если $(W^2, B^2) \succ (W^1, B^1)$ и $(W^1, B^1) \succ (W^2, B^2)$, то системы имеют одинаковую степень централизации. В противном случае, системы несравнимы по степени централизации.

Содержательный смысл такого определения степени централизации вполне понятен: чем больше степень централизации, тем меньше свобода выбора реализаций и тем больше ответственность за отклонение реализации от плана. Аналогично можно сравнивать два механизма функционирования в одной АС $\Sigma^1 = (W^1, B^1, \pi^1)$ и $\Sigma^2 = (W^2, B^2, \pi^2)$. Будем говорить, что Σ^2 имеет большую степень централизации, если $(W^2, B^2) \succ (W^1, B^1)$, т. е. большую степень централизации имеет соответствующая система стимулирования. Наконец, если активную систему с двумя различными механизмами функционирования рассматривать как две различные системы, то можно говорить о степени централизации АС. Активная система $\theta^2 = (Y^2, L^2, \Sigma^2)$ имеет большую степень централизации, чем $\theta^1 = (Y^1, L^1, \Sigma^1)$, если их описания совпадают (т. е. $(Y^1, L^1) = (Y^2, L^2)$) и $\Sigma^2 \succ \Sigma^1$.

Докажем теорему, обобщающую теорему 2.1. Обозначим G^g множество механизмов функционирования, для которых $s=r$ является ситуацией равновесия, и в ситуации равновесия реализация совпадает с планом. Рассмотрим два механизма Σ^1 и Σ^2 , имеющие один и тот же закон управления $\{\lambda(s), x(s)\}$.

Теорема 9.8. Пусть $\Sigma^2 \succ \Sigma^1$ и $\Sigma^1 \in G^g$. Тогда $\Sigma^2 \in G^g$.

Доказательство. Обозначим

$$\varphi_i^1(\lambda, x_i, r_i) = \max_{y_i \in B_i^1(x_i, r_i)} f_i^1(\lambda, x_i, y_i)$$

(аналогично $\varphi_i^2(\lambda, x_i, r_i)$). Заметим, что $\varphi_i^1[\lambda(r), x_i(r), r_i] = \varphi_i^2[\lambda(r), x_i(r), r_i]$, так как при $s=r$ реализация, выбираемая АЭ, совпадает с планом и в Σ^1 , и в Σ^2 (в Σ^1 потому, что $\Sigma^1 \in G^g$, а в Σ^2 потому, что $\Sigma^2 \succ \Sigma^1$). Обозначим $s(i) = (r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, s_i, r_{i+1}, \dots, r_n)$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_i^2(\lambda, x_i(r), r_i) &= \varphi_i^1(\lambda, x_i(r), r_i) \geq \varphi_i^1(\lambda, x_i[s(i)], r_i) \geq \\ &\geq f_i^1(\lambda, x_i[s(i)], y_i') \geq f_i^2[\lambda, x_i[s(i)], y_i'] = \varphi_i^2(\lambda, x_i[s(i)], r_i), \end{aligned}$$

где y_i' — оптимальная реализация при плане $x_i[s(i)]$ в Σ^2 . Следовательно, $s=g$ ситуация равновесия в Σ^2 .

Заметим, что в системах с полной централизацией управления $s=g$ единственная ситуация равновесия для прогрессивных механизмов функционирования. Прогрессивным при гипотезе (СВ)₁ называется механизм функционирования (соответственно закон управления), для которого $\varphi[\lambda, x_i(s), s_i]$, возрастающие функции s_i . Таким образом, с увеличением степени централизации ситуации равновесия «сходятся» к единственной ситуации $s=g$. Эти рассуждения делают весьма правдоподобной следую-

щую гипотезу: при увеличении степени централизации ситуация равновесия s^* «сдвигается» в сторону сближения с $г$ (например, существует некоторая функция расстояния $\rho(s_i^*, r_i)$, которая уменьшается при увеличении степени централизации). На содержательном уровне эта гипотеза представляется довольно естественной, поскольку увеличение ответственности за выполнение плана стимулирует повышение степени достоверности информации. Если принять такую гипотезу, то результат теоремы 9.8 можно усилить: если $s^*=г$ — единственная ситуация равновесия в Σ^1 , то $s^*=г$ — единственная ситуация равновесия в Σ^2 .

Таким образом, множество законов, для которых $s^*=г$, $y^*=x^*$ является ситуацией равновесия, «расширяется» с увеличением степени централизации управления. Поэтому оптимальный механизм функционирования на множестве G^g существует в системах с полной централизацией управления (напомним, что мы рассматриваем только прогрессивные механизмы). Заметим, однако, что этот вывод справедлив, если не учитывать затраты на систему управления, которые, очевидно, возрастают с повышением степени централизации.

§ 5. Полная централизация в АС.

Прогрессивные законы оптимального планирования

Понятие АС с полной централизацией управления было введено нами в предыдущем параграфе. Рассмотрим для таких систем законы оптимального планирования (ОП) (см. главу VII). Для абсолютной оптимальности закона ОП необходимо и достаточно выполнения двух условий в решении игры активных элементов. Во-первых, совпадение реализации y и плана x ; во-вторых, достоверность сообщаемой активными элементами информации $s^*=г$. Первое условие выполняется в силу полной централизации. Достаточным условием выполнения второго является принадлежность закона ОП классу прогрессивных законов G^{np} . Можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 9.9. Если в АС с полной централизацией управления ОП принадлежит классу прогрессивных законов G^{np} , то он является абсолютно оптимальным ($K_{оп}=1$) (докажите эту теорему самостоятельно).

Теорема хорошо иллюстрирует причину широкой распространенности принципа оптимального планирования в системах с полной централизацией управления. Действительно, при выполнении условий теоремы этот принцип обеспечивает абсолютную оптимальность функционирования АС. Однако необходимо отметить, что применение принципа оптимального планирования не обеспечивает автоматически достоверности сообщаемой элементами информации. Как мы показали в главе I, могут иметь место ситуации, когда в АС с полной централизацией управления закон ОП не обеспечивает достоверности сообщаемой эле-

ментами информации, что в свою очередь может привести к функционированию АС, далекому от оптимального. К настоящему времени в большинстве работ по оптимальному планированию вопрос откуда и как брать информацию для решения задачи оптимального планирования (т. е. способ формирования данных) и вопрос определения степени искажения сообщаемой элементами информации, либо совсем не ставятся, либо рассматриваются в отрыве от задачи принятия решений. В основном в связи с применением принципа оптимального планирования исследуются вопросы построения моделей оптимального планирования и методы их расчета. Также следует отметить, что если речь идет о системах с частично децентрализованным управлением, то при исследовании эффективности принципа ОП необходимо учитывать, что реализация, выбираемая элементами, может не совпадать с планом.

Глава X

ПРИНЦИП СОГЛАСОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как мы убедились в предыдущей главе, задача выбора оптимального закона управления является в общем случае довольно не простой. Нам удалось найти оптимальный закон в классе G^1 — закон ОУ. Примечательно, что в ситуации равновесия для закона ОУ сообщается достоверная информация (степень искажения информации $\Delta=0$), и реализация совпадает с планом (степень расхождения реализации и плана $\delta=0$). Если рассмотреть задачу выбора оптимального механизма в классе прогрессивных механизмов, обеспечивающих достоверность информации, то здесь мы показали, что оптимальный механизм существует в системах с полной централизацией управления. Однако задача его конструктивного определения не решена в общем случае. Тем более сложной является задача определения оптимальных механизмов в системах с частичной централизацией управления (если полная централизация в системе не допустима по тем или иным причинам). Поэтому важной задачей является исследование законов управления специального вида.

В этой главе мы проведем исследование множества законов согласованного управления при встречном способе формирования данных. Нас будут интересовать условия, при которых устойчивым решением игры является сообщение всеми АЭ достоверных оценок $\{r_i\}$. В качестве принципа рационального выбора стратегий примем принцип максимального гарантированного результата.

§ 1. Задача согласованного планирования

Принцип согласованного управления был сформулирован в главе VII. Любой закон согласованного управления (СУ) определяется как решение некоторой задачи согласованного планирования (СП) (задача 7.8.3), (7.8.4), (7.8.6). В этой главе мы будем рассматривать задачу СП с условиями ε -согласования (7.8.7). Выпишем эту задачу еще раз:

$$\Psi(\lambda, x, s) \xrightarrow{\lambda, x} \max, \quad x \in X(s), \quad \lambda \in L, \quad (1.1)$$

$$\varphi_i(\lambda, x_i, s_i) \geq \varepsilon_i \cdot \max_{z \in X_i(s_i)} \varphi_i(\lambda, z, s_i), \quad 0 < \varepsilon_i \leq 1 \quad (1.2)$$

(вместо оценок σ_i мы пишем s_i , так как рассматривается встреч-

ный способ формирования данных). Обозначим $A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i)$ — множество согласованных планов i -го АЭ. Тогда условие $x_i \in X_i(s_i)$ и условие согласования можно заменить одним условием $x_i \in A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i)$.

§ 2. Гипотеза слабого влияния

Гарантирующая стратегия i -го АЭ определяется из условия максимума по s_i гарантированного результата

$$\Phi_i^r(s_i) = \min_{\{s_j, j \neq i\}} \Phi_i[\lambda(s), x_i(s), r_i]. \quad (2.1)$$

Для гарантированного результата (2.1) справедлива оценка в случае законов СУ (1.1), (1.2):

$$\Phi_i^r(s_i) \geq \min_{\lambda \in L} \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i)} \Phi_i(\lambda, x_i, r_i). \quad (2.2)$$

Заметим, что определение гарантированного результата (2.1) является довольно сложной задачей для АЭ, поскольку он должен решить задачу минимизации своей целевой функции по оценкам $\{s_j, j \neq i\}$, при условии, что $\lambda(s)$ и $x_i(s)$ являются оптимальным решением задачи согласованного планирования (1.1), (1.2). Определение оценки (2.2) является гораздо более простой задачей минимизации $\Phi_i(\lambda, x_i, r_i)$ при условиях (1.2) и $\lambda \in L$. Поэтому весьма правдоподобной представляется гипотеза, что при определении гарантирующих стратегий АЭ будет максимизировать оценку (2.2) гарантированного результата. В этом случае принцип рационального выбора стратегий запишется в виде

$$\min_{\lambda \in L} \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i)} \Phi_i(\lambda, x_i, r_i) \xrightarrow{s_i \in \Omega_i} \max. \quad (2.3)$$

Правило (2.3) называется принципом максимального гарантированного результата при гипотезе слабого влияния. При этом имеется в виду следующая гипотеза: АЭ независимо от сообщаемой на этапе формирования данных оценки s_i ожидает на этапе планирования установления любого λ из L и любого согласованного плана из $A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i)$ (будем кратко обозначать эту гипотезу (СВ)₂ в отличие от гипотезы (СВ)₁, используемой в главе IX при анализе ситуаций равновесия). Действительно, принцип рационального выбора стратегий при гипотезе (СВ)₂ будет определяться (2.3). Заметим, однако, что для обоснования принципа (2.3) достаточно более слабого предположения, а именно: при любой оценке s_i АЭ может ожидать установления на этапе планирования управления $\lambda^r(s_i)$ и согласованного плана $x_i \in A_i(\lambda^r(s_i), s_i, \varepsilon_i)$ таких, что значение целевой функции равно оценке (2.2).

В дальнейшем мы будем предполагать, что принцип рационального выбора стратегий определяется условием (2.3) и соответствующие стратегии будем называть гарантирующими стратегиями, а совокупность гарантирующих стратегий — гарантирующей ситуацией. Для краткости управление $\lambda^r(s_i)$, на котором достигается гарантированный результат при гипотезе (СВ)₂, будем называть гарантирующим управлением (хотя более правильным было бы назвать $\lambda^r(s_i)$ минимизирующим управлением).

Перейдем к исследованию гарантирующих стратегий для закона ОУ ($\varepsilon_i = 1$).

Теорема 10.1. При гипотезе (СВ)₂ для закона ОУ стратегия $s_i = r_i$ является гарантирующей.

Доказательство. Требуется доказать, что $\forall s_i \in \Omega_i$

$$\min_{\lambda \in L} \min_{x_i \in A_i(\lambda, r_i, 1)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) \geq \min_{\lambda \in L} \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, 1)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i).$$

Для этого достаточно доказать, что $\forall s_i \in \Omega_i, \forall \lambda \in L$

$$\min_{x_i \in A_i(\lambda, r_i, 1)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \max_{x_i \in X_i(r_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) \geq \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, 1)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i). \quad (2.4)$$

Условие (2.4) эквивалентно следующему $\forall \lambda \in L, \forall x_i'$

$$\max_{x_i \in X_i(r_i)} \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda, x_i, y_i) \geq \max_{y_i \in B_i(x_i', r_i)} f_i(\lambda, x_i', y_i).$$

Для доказательства последнего условия обозначим y_i' такое y_i , что $f_i(\lambda, x_i', y_i') = \max_{y_i \in B_i(x_i', r_i)} f_i(\lambda, x_i', y_i)$. Имеем на основании свойства (7.2.2) функций $f_i(\lambda, x_i, y_i)$

$$\begin{aligned} x_i \max_{x_i \in X_i(r_i)} \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda, x_i, y_i) &\geq \\ &\geq f_i(\lambda, y_i', y_i') \geq f_i(\lambda, x_i', y_i') = \max_{y_i \in B_i(x_i', r_i)} f_i(\lambda, x_i', y_i). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Достаточные условия единственности гарантирующих стратегий для законов ОУ

Следующая теорема формулирует условия на целевые функции АЭ, достаточные для существования единственной гарантирующей стратегии $s_i = r_i$.

Обозначим $h_i(s_i^1, s_i^2) = \min_{\lambda \in L} \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i^1, 1)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i^2)$. Заметим, что

$h_i(s_i, r_i)$ определяет гарантированный результат при стратегии s_i .

Теорема 10.2. Для того чтобы $s_i=r_i$ была единственной гарантирующей стратегией, достаточно $\forall s_i^1, s_i^2 \in \Omega_i, s_i^1 \neq s_i^2$

$$h_i(s_i^2, s_i^2) > h_i(s_i^1, s_i^2). \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть $s_i \neq r_i$, тогда в силу условий теоремы при $s_i^1=r_i, s_i^2=s_i$ имеем $\forall s_i \in \Omega_i$

$$\min_{\lambda \in L} \min_{x_i \in A_i(\lambda, r_i, 1)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) > \min_{\lambda \in L} \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, 1)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Достаточным условием для выполнения (3.1) является $\forall s_i^1, s_i^2 \in \Omega_i, s_i^1 \neq s_i^2, \forall \lambda \in L$

$$A_i(\lambda, s_i^1, \varepsilon_i) \setminus A_i(\lambda, s_i^2, \varepsilon_i) \neq \emptyset. \quad (3.2)$$

Условие (3.2) будем называть слабым условием равноправия функций предпочтения. Содержательно оно означает, что для любых двух функций предпочтения и любого управления найдется план, который является согласованным для одной функции предпочтения, но не является согласованным для другой. Это условие действительно является более слабым, чем условие равноправия функций предпочтения, приведенное в главе IX, которое для законов СУ имеет вид $\forall s_i^1, s_i^2 \in \Omega_i, s_i^1 \neq s_i^2, \forall \lambda$

$$A_i(\lambda, s_i^1, \varepsilon_i) \cap A_i(\lambda, s_i^2, \varepsilon_i) = \emptyset. \quad (3.3)$$

Очевидно из (3.3) следует (3.2) (предполагается, что $A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i) \neq \emptyset$ при любых $\lambda \in L, s_i \in \Omega_i, 0 < \varepsilon_i \leq 1$).

З а м е ч а н и е 2. Гипотеза слабого влияния, приведенная в этой главе, отличается, как легко заметить, от гипотезы слабого влияния, используемой в главе IX. Однако теорема 10.1 остается справедливой, если слабое влияние понимать в смысле главы IX. Действительно, по существу в теореме 10.1 доказан более сильный результат, а именно: $\forall \lambda \in L, \forall s_i \in \Omega_i$

$$\min_{x_i \in A_i(\lambda, r_i, 1)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) \geq \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, 1)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i).$$

Отсюда следует, что $s_i=r_i$ является абсолютно оптимальной стратегией. Для справедливости теоремы 10.2 для любых $\lambda \in L$ необходимо условие (3.1) заменить на слабое условие равноправия функций предпочтения (3.2).

С л е д с т в и е. Пусть $\forall \lambda \in L, \forall s_i \in \Omega_i$ функция предпочтения $\varphi_i(\lambda, x_i, s_i)$ имеет единственный максимум в точке $x_i(\lambda, s_i)$, причем $x_i(\lambda, s_i^1) \neq x_i(\lambda, s_i^2)$ для $s_i^1 \neq s_i^2$. Тогда $s_i=r_i$ единственная гарантирующая стратегия. Доказательство сразу следует из справедливости условия (3.2) (см. замечание 1). Это следствие аналогично следствию к теореме 9.4 в главе IX.

Достаточные условия единственности гарантирующей стратегии $s_i=r_i$ в общем случае можно получить, рассматривая целе-

вые функции АЭ со штрафами за искажение информации. Определим понятие системы со слабыми штрафами. Пусть Ω_i^r — множество гарантирующих стратегий в системе без штрафов. Пусть далее штрафы настолько малы, что практически не меняют множества гарантирующих стратегий. Тем не менее они все-таки есть, и поэтому гарантирующая стратегия выбирается из условия минимума штрафов на множестве Ω_i^r . По существу, введение слабых штрафов является формальным отражением принципа: если имеется несколько гарантирующих стратегий, то АЭ выбирает из них наиболее близкую к достоверной (мерой близости является величина штрафа за искажение информации). Очевидно, что в системе со слабыми штрафами сообщение достоверных оценок является единственной гарантирующей стратегией АЭ.

§ 4. Достаточные условия единственности гарантирующей стратегии $s_i = r_i$ для законов СУ

Перейдем к рассмотрению законов СУ при $0 < \varepsilon_i < 1$.

Теорема 10.3. Пусть имеет место условие равноправия функций предпочтения (3.2). Тогда $s_i = r_i$ — единственная гарантирующая стратегия.

Доказательство. Положим $s_i^1 = s_i$, $s_i^2 = r_i$. Пусть $s_i \neq r_i$. В силу (3.2) $\forall \lambda \in L$ найдется план $x_i \in A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i) \setminus A_i(\lambda, r_i, \varepsilon_i)$. Имеем

$$\begin{aligned} \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) &< \varepsilon_i \max_{x_i \in X_i(r_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) \leq \\ &\leq \min_{x_i \in A_i(\lambda, r_i, \varepsilon_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример. (Задача распределения сырья, см. гл. III § 1.) Условия ε -согласования имеют вид

$$2s_i \sqrt{x_i} - \lambda x_i \geq \varepsilon_i \max_{x_i} (2s_i \sqrt{x_i} - \lambda x_i).$$

Множество $A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i)$ определяется следующим образом:

$$\frac{s_i^2}{\lambda^2} (1 - \sqrt{1 - \varepsilon_i})^2 \leq x_i \leq \frac{s_i^2}{\lambda^2} (1 + \sqrt{1 - \varepsilon_i})^2.$$

Очевидно, что при $s_i^1 \neq s_i^2$ всегда найдется $x_i \in A_i(\lambda, s_i^1, \varepsilon_i) \setminus A_i(\lambda, s_i^2, \varepsilon_i)$. Таким образом, условия равноправия функций предпочтения выполняются.

Достаточные условия того, что стратегия $s_i = r_i$ является гарантирующей и единственной для задач достаточно общего вида в случае ε -согласования можно получить, рассматривая целевые функции со штрафами за искажение информации.

Рассмотрим случай сильных штрафов за искажение инфор-

мации. Заметим, что гарантированный результат i -го АЭ при сообщении оценки $s_i \leq r_i$ и установлении управления λ больше или равен

$$e_i \max_{x_i \in X_i(s_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i). \quad (4.1)$$

Предположим, что гарантированный результат равен этой величине при любых $s_i \leq r_i$, $\lambda \in L$, т. е.

$$\min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, e_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i) = e_i \max_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, e_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i). \quad (4.2)$$

Тогда имеет место

Теорема 10.4. В системе с сильными штрафами за искажение информации $s_i = r_i$ единственная гарантирующая стратегия АЭ.

Доказательство. Пусть $s_i \leq r_i$, $s_i \neq r_i$. Тогда имеет место $\forall \lambda \in L$

$$\begin{aligned} \min_{x_i \in A_i(\lambda, r_i, e_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) &\geq e_i \max_{x_i \in X_i(r_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) \geq \\ &\geq e_i \max_{x_i \in X_i(s_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) > e_i \max_{x_i \in X_i(s_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i) = \\ &= \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, e_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i). \end{aligned}$$

Первое неравенство в этой цепочке следует из условий ε -согласования при $s_i = r_i$, второе — из свойства (8.3.7) множеств $X_i(s_i)$, строгое неравенство следует из свойства (8.3.8) функций $\varphi_i(\lambda, x_i, r_i)$, наконец, равенство следует из (4.2). Таким образом, $s_i = r_i$ — единственная гарантирующая стратегия.

Если условие (4.2) не имеет места, т. е.

$$\begin{aligned} \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, e_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i) &= \min_{x_i \in X_i(s_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i) > \\ &> e_i \max_{x_i \in X_i(s_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i), \end{aligned}$$

то утверждение теоремы 10.4 сохраняет силу, если $X_i(r_i) = X_i(s_i) = X_i$ (множество возможных планов не зависит от сообщаемых оценок s_i). Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} \min_{x_i \in A_i(\lambda, r_i, e_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) &\geq \min_{x_i \in X_i} \varphi_i(\lambda, x_i, r_i) > \\ &> \min_{x_i \in X_i} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i) = \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, e_i)} \varphi_i(\lambda, x_i, s_i). \end{aligned}$$

Теорема 10.4 справедлива и в том случае, если рассматривается система с полной централизацией управления (например, система с сильными штрафами за отклонение реализации от плана). Действительно, в такой системе $y_i = x_i \in B_i(x_i, s_i)$.

Следовательно, формально можно записать

$$\begin{aligned} f_i(\lambda, x_i, x_i) &= \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda, x_i, y_i) = \\ &= \max_{y_i \in B_i(x_i, s_i)} f_i(\lambda, x_i, y_i) = \varphi_i(\lambda, x_i, s_i). \end{aligned}$$

Теперь можно повторить доказательство теоремы 10.4. Пусть теперь в системе с полной централизацией управления применяется прогрессивный механизм функционирования, и все АЭ это знают. Другими словами, каждый АЭ знает, что при сообщении оценки $s_i^2 \geq s_i^1$ ($s_i^2 \neq s_i^1$, $s_i^2 \leq r_i$) значение его целевой функции возрастает (а значит, возрастет и гарантированный результат). Отсюда, очевидно, следует, что сообщение достоверных оценок является единственной гарантирующей стратегией каждого АЭ. Заметим, что при доказательстве теоремы 10.4 мы не использовали свойства прогрессивности механизма. Поэтому условие прогрессивности не является необходимым для справедливости утверждения теоремы 10.4. Рассмотрим два механизма функционирования $\Sigma^1 = (W^1, B^1, \pi_{cy})$ и $\Sigma^2 = (W^2, B^2, \pi_{cy})$, где π_{cy} закон ε -согласованного управления в Σ^1 (заметим, что в Σ^2 он уже может и не быть законом ε -согласованного управления, так как $\varphi^1(\lambda, x_i, s_i) = \varphi^2(\lambda, x_i, s_i)$ в общем случае. Обозначим G^g множество механизмов функционирования, для которых $s=g$ единственная гарантирующая ситуация и в этой ситуации $y=x$ (реализация совпадает с планом).

Теорема 10.5. Пусть $\Sigma^1 \in G^g$ и $\Sigma^2 \succ \Sigma^1$. Тогда $\Sigma^2 \in G^g$.

Доказательство. Пусть $s_i \neq r_i$. Тогда

$$\begin{aligned} \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i)} \varphi_i^2(\lambda, x_i, r_i) &\leq \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, \varepsilon_i)} \varphi_i^1(\lambda, x_i, r_i) < \\ < \min_{x_i \in A_i(\lambda, r_i, \varepsilon_i)} \varphi_i^1(\lambda, x_i, r_i) &= \min_{x_i \in A_i(\lambda, r_i, \varepsilon_i)} \varphi_i^2(\lambda, x_i, r_i). \end{aligned}$$

Следовательно, $s_i = r_i$ единственная гарантирующая стратегия в Σ^2 .

§ 5. Анализ линейных целевых функций

Дадим иллюстрацию доказанных выше теорем на примере линейных целевых функций

$$\varphi(\lambda, x, r) = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j r_j, \quad r_j > 0 \quad (5.1)$$

(номер АЭ будем опускать, когда речь идет о любом активном элементе).

Примем, что

$$L = \left\{ \lambda : \lambda \geq 0, \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 \right\}, \quad X = \left\{ x : x \geq 0, \sum_{j=1}^m x_j = T \right\}. \quad (5.2)$$

Содержательно x_j можно интерпретировать как продолжительность работы предприятия по выпуску продукции вида j , T — продолжительность периода функционирования, λ_j — относительная цена продукции вида j , r_j — производительность предприятия по продукции вида j . В этом случае $\sum_j \lambda_j r_j x_j$ — объем реализации (см. гл. IV § 1).

Предполагая, что гипотеза слабого влияния имеет место, рассмотрим закон ОУ. Для определения гарантирующих стратегий заметим, что гарантирующее управление $\lambda^r(s)$ удовлетворяет условию

$$\lambda_j^r(s) s_j = \text{const}, \quad (5.3)$$

(докажите самостоятельно).

Из (5.3), с учетом (5.2), получаем

$$\lambda_j^r(s) = \frac{1}{s_j \sum_{k=1}^m \frac{1}{s_k}}.$$

Гарантированный результат

$$\varphi_i^r(s_i) = T \min_j \frac{r_j}{s_j \sum_k \frac{1}{s_k}} \quad (5.4)$$

максимален на стратегиях $s = \gamma r$ ($\gamma > 0$). Таким образом, условия теоремы 10.2 не выполняются и гарантирующая стратегия не единственна. Применение слабых штрафов позволяет получить единственную гарантирующую стратегию $s = r$.

Рассмотрим теперь законы СУ. Для определения гарантированного результата при стратегии s необходимо найти

$$h(s, r) = \min_{\lambda \in L} \min_{x \in A(\lambda, s, e)} \sum_j \lambda_j x_j r_j = T \min_{\lambda \in L} \min_{j: \lambda_j s_j \geq e c} \lambda_j r_j,$$

где $c = \max_k \lambda_k s_k$.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат

$$h(s, r) = T \min_j \frac{\varepsilon r_j M}{s_j - (1 - \varepsilon) M}, \quad M = \left(\sum_k \frac{1}{s_k} \right)^{-1}. \quad (5.5)$$

Легко видеть, что если s^* гарантирующая стратегия, то и любая стратегия γs^* ($\gamma > 0$) является гарантирующей. Заметим, однако, что стратегия $s = r$ не входит в данном случае в множество гарантирующих стратегий, за исключением случая равных r_j . Действительно, необходимым и достаточным условием максимума

$h(s, r)$ по s является

$$\forall j: \frac{r_j M}{s_j - (1 - \varepsilon) M} = b. \quad (5.6)$$

Это условие не выполняется для $s=r$, если r_j не все равны между собой. Таким образом, система «слабых штрафов» в данном случае недостаточна для обеспечения достоверности сообщаемой информации.

Для определения гарантирующих стратегий из (5.6) находим

$$s_j = M \left(\frac{r_j}{b} + 1 - \varepsilon \right), \quad (5.7)$$

где b определяется из уравнения

$$\sum_{j=1}^m \left[\frac{r_j}{b} + 1 - \varepsilon \right]^{-1} = 1. \quad (5.8)$$

Заметим, что при $b \rightarrow 0$ левая часть уравнения стремится к 0, а при $b \rightarrow \infty$ к $m/(1-\varepsilon) > 1$. Следовательно, уравнение (5.8) имеет единственное решение. Окончательно получаем, что любая гарантирующая стратегия имеет вид

$$s_j^* = \gamma(r_j + b(1 - \varepsilon)), \quad \gamma > 0. \quad (5.9)$$

Примем, что величина штрафа за искажение информации пропорциональна $\|s^* - r\| = \max_j |s_j^* - r_j|$. Тогда единственная гарантирующая стратегия имеет вид (5.9), где γ определяется из условия

$$\max_j |(\gamma - 1)r_j + \gamma(1 - \varepsilon)b| \xrightarrow{\gamma} \min. \quad (5.10)$$

Решая эту задачу, после несложных вычислений получим

$$\gamma^* = \frac{r_{\text{ср}}}{r_{\text{ср}} + (1 - \varepsilon)b}, \quad \text{где } r_{\text{ср}} = \frac{\min_j r_j + \max_j r_j}{2}.$$

При этом степень искажения информации равна

$$\Delta = \max_{r \in \Omega} \frac{\max_j r_j - \min_j r_j}{\max_j r_j + \min_j r_j + 2(1 - \varepsilon)b} (1 - \varepsilon)b. \quad (5.11)$$

Пусть $\Omega = \prod_{j=1}^m \Omega_j$, где $\Omega_j = [d, D]$. Учитывая, что

$$b \leq \frac{D}{m - 1 + \varepsilon},$$

получаем оценку степени искажения информации

$$\Delta \leq \frac{1 - \varepsilon}{(m + 1 - \varepsilon) + \kappa (m - 1 + \varepsilon)} (D - d), \quad \kappa = \frac{d}{D}. \quad (5.12)$$

Имея такую оценку, можно определить ошибку в решении задачи согласованного планирования в зависимости от ε и на основе этой информации решить вопрос о наиболее целесообразном значении ε . Действительно, чем меньше ε , тем «слабее» условия согласования, что увеличивает возможности оптимизации. Однако с уменьшением ε возрастает ошибка в оптимальном решении задачи согласованного планирования за счет искажения данных.

У п р а ж н е н и е. Определите степень искажения информации для целевых функций вида

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j \left[r_j - \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} (r_j - s_j) \right],$$

$$\text{где } \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } r_j \geq s_j, \\ -\beta, & \text{если } r_j < s_j, \end{cases}$$

$$0 < \alpha \leq 1, \quad \beta > 0.$$

При каких значениях α , β сообщение достоверной информации является единственной гарантирующей стратегией?

Глава XI

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СОГЛАСОВАННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

§ 1. Особенности задач согласованного планирования

Задача согласованного планирования заключается в определении согласованного плана $\mathbf{x} = \{x_i\}$ и согласованного управления λ , обеспечивающих максимум (минимум) целевой функции системы $\Psi(\mathbf{x}, \lambda)$ при заданных множествах $\mathbf{X}$ допустимых планов и L — допустимых управлений. Согласованным планом и согласованным управлением называется план $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, и управление $\lambda \in L$, удовлетворяющие условиям согласования

$$\eta_i(\lambda, x_i) = \max_{y \in X_i} \eta_i(\lambda, y), \quad (1.1)$$

где $\eta_i(\lambda, x_i)$ — функция предпочтения i -го АЭ.

Множества $\mathbf{X}$, L , X_i будем предполагать компактными множествами $n \times m$, l , m -мерного пространства соответственно. Функции $\Psi(\mathbf{x}, \lambda)$, $\eta_i(\lambda, x_i)$ предполагаются непрерывными по x_i и λ .

Вопрос существования решения задачи согласованного планирования в общем случае является достаточно сложным. Даже если задача оптимального планирования без условий согласования (1.1) имеет решение, задача согласованного планирования может не иметь решения.

Условия существования согласованных планов для ряда задач согласованного планирования будут рассмотрены ниже. Пока будем предполагать, что согласованные планы существуют. Обозначим Ψ_c значение целевой функции в оптимальном решении задачи согласованного планирования, Ψ_m — значение целевой функции, соответствующее оптимальному решению задачи планирования без учета условий согласования (это решение будем называть *оптимальным планом*). Очевидно, что при решении задачи на максимум целевой функции справедливо соотношение $\Psi_c \leq \Psi_m$. Примем, что $\Psi_m > 0$, и определим

$$\rho_c = \Psi_c / \Psi_m \leq 1. \quad (1.2)$$

Величина ρ_c называется коэффициентом согласования. Коэффициент $\gamma_c = 1 - \rho_c$ естественно назвать коэффициентом рассогласования. Для ряда задач $\rho_c = 1$ для любых функций предпочтения заданного класса. Такие задачи называются эписогласован-

ными. Очевидно, что для эписогласованных задач хотя бы один оптимальный план является согласованным.

Будем рассматривать задачи, в которых целевая функция системы $\Psi(x)$ не зависит явным образом от управления λ . При этом, если отбросить условия согласования, получим обычную задачу оптимального планирования

$$\Psi(x) \xrightarrow{x \in X} \max. \quad (1.3)$$

Если известно, что задача является эписогласованной, то для ее решения достаточно определить множество X^0 оптимальных планов задачи (1.3), а затем среди этих планов найти хотя бы один согласованный.

В следующем параграфе рассматриваются примеры задач согласованного планирования, выделяющие важный в прикладном отношении класс задач. Для задач этого класса получены необходимые и достаточные условия согласованности плана, предложены методы определения согласованного управления и алгоритмы решения задач согласованного планирования, основанные на схемах ветвей и границ и локальной оптимизации.

§ 2. Примеры задач согласованного планирования

Рассмотрим несколько содержательных постановок задач согласованного планирования из различных областей экономики.

Задача 1. Взаимодействие экономической системы с внешней средой.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из n предприятий (объединений, отраслей и т. д. в зависимости от уровня рассмотрения). Каждое предприятие может выпускать продукцию различных видов. Обозначим a_{ij} — производительность предприятия i по j -му виду продукции, x_{ij} — продолжительность работы предприятия i по выпуску j -го вида продукции, T_i — продолжительность работы предприятия в течение планируемого периода, b_{jk}^i — количество продукции вида k , необходимое для производства единицы продукции вида j предприятием i (предполагаем, что b_{jk}^i — известные «нормы расхода» исходных продуктов). Обозначим также c_j «внешнюю» цену продукции j -го вида. Примем, что любое количество продукции любого вида экономическая система может купить по тем же ценам c_j . Задача заключается в определении «внутренних» цен $\{\lambda_j\}$ и согласованного плана $\{x_{ij}\}$, обеспечивающих максимальный доход системы. Определим величину дохода для произвольного плана $x = \{x_{ij}\}$. В дальнейшем, говоря о доходе системы и количествах выпускаемой продукции, мы будем иметь в виду планируемый доход и планируемые количества продукции. Продукции k -го вида будет выпущено $\sum_i a_{ik} x_{ik}$, а требуется ее для обеспечения производства

$\sum_i \sum_j b_{jk}^i a_{ij} x_{ij}$. Поэтому доход от производства продукции k -го вида (возможно, отрицательный) будет равен $c_k \left[\sum_i a_{ik} x_{ik} - \sum_i \sum_j b_{jk}^i a_{ij} x_{ij} \right]$.

Общий доход системы $\Psi(\mathbf{x})$ при плане $\mathbf{x}$ составляет

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= \sum_k c_k \sum_i \left[a_{ik} x_{ik} - \sum_j b_{jk}^i a_{ij} x_{ij} \right] = \\ &= \sum_i \sum_j x_{ij} a_{ij} \left(c_j - \sum_k c_k b_{jk}^i \right). \end{aligned}$$

Обозначая

$$a_{ij} \left(c_j - \sum_k c_k b_{jk}^i \right) = c_{ij},$$

запишем $\Psi(\mathbf{x})$ в виде линейной формы

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}.$$

Окончательно задачу согласованного планирования можно записать следующим образом

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \xrightarrow{\mathbf{x}} \max \quad (2.1)$$

при ограничениях $x_{ij} \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = T_i, \quad (2.2)$$

и условиях согласования.

Чтобы записать условия согласования, нужно определить вид функции предпочтения предприятий. Будем ориентироваться на поощрительный фонд предприятия как основу его целевой функции. Если величина поощрительного фонда определяется в основном количеством реализованной продукции (в стоимостном выражении), то

$$\eta_i(\lambda, x_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j s_{ij} x_{ij}, \quad (2.3)$$

а если величиной прибыли предприятия, то

$$\sum_{j=1}^m (\lambda_j s_{ij} - q_{ij}) x_{ij},$$

где q_{ij} затраты предприятия i при работе по выпуску продукции вида j в течение единичного интервала. В дальнейшем для опре-

деленности будем рассматривать функции предпочтения вида (2.3). Тогда условия согласования можно записать следующим образом:

$$(\max_k \lambda_k s_{ik} - \lambda_j s_{ij}) x_{ij} = 0. \quad (2.4)$$

Задача 2. Выпуск продукции в заданном отношении.

Как и в предыдущем примере, рассмотрим экономическую систему из n предприятий. В данном случае примем, что исходные продукты не входят в номенклатуру выпускаемых видов и их запасы достаточно велики. Пусть определены требуемые количества $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ продукции различных видов. Заранее нельзя утверждать, что существует согласованный план, обеспечивающий выпуск продукции каждого вида не менее требуемого количества. В случае, если такого плана не существует, необходимо определить план с минимальным относительным дефицитом продукции, если существует, то с максимальным относительным избытком всех видов продукции. Обе эти задачи можно объединить одним критерием

$$\Psi(x) = \min_j \frac{1}{\mathcal{D}_j} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij}. \quad (2.5)$$

Получаем следующую задачу: определить относительные «внутренние» цены $\{\lambda_j\}$ и согласованный план $\{x_{ij}\}$, обеспечивающий максимум выражения (2.5) при условиях (2.2) и (2.4).

Рассмотренные задачи имеют общие черты. Во-первых, множество X_i возможных планов i -го активного элемента определяется ограничениями $x_i \geq 0$ и $\sum_j x_{ij} = T_i$ (в более общем случае, $\sum_j a_{ij} x_{ij} = T_i$). Во-вторых, функция предпочтения любого активного элемента имеет вид $\sum_j \lambda_j s_{ij} x_{ij}$ (в более общем случае, $\sum_j (\lambda_j s_{ij} - q_{ij}) x_{ij}$). Далее рассматриваются, если не оговорено особо, задачи с множествами X_i и функциями предпочтения $\eta_i(\lambda, x_i)$ указанного вида.

§ 3. Условия согласованности плана

Пусть x^0 — допустимый план активной системы. Как проверить, является ли этот план согласованным, т. е. существует ли допустимое управление λ такое, что выполняются условия согласования. Рассмотрим решение этой задачи для случая функций

предпочтения, линейных по x и λ

$$\eta_i(\lambda, x_i) = \sum_{j=1}^m (\lambda_j s_{ij} - q_{ij}) x_{ij}. \quad (3.1)$$

Для функций предпочтения вида (3.1) условия согласования можно записать соответственно в виде

$$[\max_k (\lambda_k s_{ik} - q_{ik}) - (\lambda_j s_{ij} - q_{ij})] x_{ij} = 0. \quad (3.2)$$

Необходимые и достаточные условия согласованности плана x^0 дает следующая теорема.

Т е о р е м а 11.1. Для того чтобы план x^0 был согласованным, необходимо и достаточно, чтобы он обеспечивал минимум линейной формы

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m q_{ij} x_{ij} \quad (3.3)$$

при ограничениях $x_{ij} \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = T_i, \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} s_{ij} = \sum_{i=1}^n x_{ij}^0 s_{ij}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть x^0 — согласованный план, λ — согласованное управление. Рассмотрим задачу, двойственную к (3.3) — (3.5) с двойственными переменными $u = (u_1, \dots, u_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Определить u , λ такие, что

$$-\sum_i u_i T_i + \sum_{i,j} x_{ij}^0 s_{ij} \lambda_j \xrightarrow{u, \lambda} \max \quad (3.6)$$

при ограничениях

$$-u_i + \lambda_j s_{ij} - q_{ij} \leq 0. \quad (3.7)$$

План x^0 удовлетворяет всем ограничениям прямой задачи. Так как $u_i = \max_k (\lambda_k s_{ik} - q_{ik})$, то условия согласования (3.2) есть не что иное, как соотношения дополняющей нежесткости для рассмотренных задач. Следовательно, x^0 — оптимальный план прямой задачи.

Пусть x^0 — оптимальное решение прямой задачи. Тогда существует оптимальное решение двойственной задачи u^0 , λ^0 , удовлетворяющее соотношениям дополняющей нежесткости. Соответствующий вектор λ^0 является согласованным управлением.

Теорема доказана.

В практических задачах управление λ часто интерпретируется как цены продукции. В этом случае важным является вопрос о существовании неотрицательного согласованного управления.

Следствие 1. Для того чтобы план x^0 был согласованным (в смысле существования неотрицательного согласованного управления), необходимо и достаточно, чтобы он обеспечивал минимум линейной формы (3.3) при ограничениях (3.4) и

$$\sum_i x_{ij} s_{ij} \geq \sum_i x_{ij}^0 s_{ij}.$$

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 11.1, с учетом неотрицательности двойственных переменных $\{\lambda_j\}$.

Введем дополнительные ограничения на управления, связанные с условием неотрицательности функций предпочтения, что эквивалентно требованию $u_i = \max_k (\lambda_k s_{ik} - q_{ik}) \geq 0$. В этом случае необходимые и достаточные условия согласованности плана определяются теоремой 11.1, в условиях которой ограничения (3.4) и (3.5) заменяются соответственно на $\sum_j x_{ij} \leq T_i$ и $\sum_i x_{ij} s_{ij} \geq \sum_i x_{ij}^0 s_{ij}$.

Рассмотрим случай однородных условий согласования, когда $q_{ij} = 0$,

$$(\max_k \lambda_k s_{ik} - \lambda_j s_{ij}) x_{ij} = 0. \quad (3.8)$$

Из теоремы 11.1 следует, что любой план x^0 будет согласованным. Это действительно так, достаточно взять управление $\lambda = 0$. Однако при однородных условиях согласования нас интересует существование нетривиальных согласованных управлений, т. е. таких, что $\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$. На этот вопрос теорема 11.1 уже не дает ответа.

Примем для дальнейшего, что $s_{ij} \geq 0$, и для любого j существует $i: s_{ij} > 0$. Действительно, если существует $j: s_{ij} = 0$ для всех i , то вопрос о существовании нетривиального согласованного управления $\lambda \geq 0$ решается элементарно. Таким управлением будет $\lambda = \{\lambda_k\}$, где $\lambda_j > 0$ и $\lambda_k = 0$ для $k \neq j$. Практически этот случай малоинтересен. С учетом сделанных предположений необходимые и достаточные условия согласованности плана x^0 дает

Теорема 11.2. Для того чтобы x^0 удовлетворял однородным условиям согласования, необходимо и достаточно, чтобы x^0 обеспечивал максимум величины $c\gamma$ ($c > 0$) при ограничениях (3.4) и

$$-\sum_i s_{ij} x_{ij} + \gamma \sum_i s_{ij} x_{ij}^0 \leq 0. \quad (3.9)$$

Доказательство. Выпишем двойственную задачу

$$\sum_i u_i T_i \rightarrow \min$$

при ограничениях $\lambda \geq 0$,

$$u_i - \lambda_j s_{ij} \geq 0, \quad (3.10)$$

$$\sum_{i,j} \lambda_j s_{ij} x_{ij}^0 \geq c. \quad (3.11)$$

Если x^0 — оптимальный план прямой задачи, то выполняются соотношения $(u_i - \lambda_j s_{ij}) x_{ij}^0 = 0$, которые эквивалентны однородным условиям согласования. При этом, в силу (3.11), $\lambda \neq 0$. Если x^0 — согласованный план, то существуют $\{\lambda_j^0\}$ такие, что $\lambda^0 \geq 0$, $\lambda^0 \neq 0$ и выполняются соотношения дополняющей нежесткости. Покажем, что $\sum_{i,j} \lambda_j^0 s_{ij} x_{ij}^0 > 0$. Действительно, если $\sum_{i,j} \lambda_j^0 s_{ij} x_{ij}^0 = 0$,

то $\lambda_j^0 s_{ij} x_{ij}^0 = 0$ для всех i, j в силу неотрицательности $\{\lambda_j^0\}$, $\{x_{ij}^0\}$ $\{s_{ij}\}$. Далее, существует $j: \lambda_j^0 > 0$ и существует $i: s_{ij} > 0$. Поэтому $\lambda_j^0 s_{ij} > 0$ и должно быть $x_{ij}^0 = 0$. Но для указанного i существует $q: x_{iq}^0 > 0$. Следовательно, в силу условий согласования $\lambda_q^0 s_{iq} = \max_k \lambda_k^0 s_{ik} > 0$ и $\lambda_q^0 s_{iq} x_{iq}^0 > 0$. Получили противоречие. Итак,

$\sum_{i,j} \lambda_j^0 s_{ij} x_{ij}^0 > 0$. Положим в (3.11) $c = \sum_{i,j} \lambda_j^0 s_{ij} x_{ij}^0$. Управление λ^0 удов-

летворяет всем ограничениям двойственной задачи и условиям дополняющей нежесткости. Поэтому x^0 — оптимальное решение прямой задачи. Теорема доказана.

Теорема 11.2 отвечает на вопрос о существовании неотрицательного согласованного управления $\lambda \geq 0$. Рассмотрим теперь условия существования положительного согласованного управления $\lambda > 0$, считая, что условия теоремы 11.2 выполнены.

Следствие 1. Необходимыми условиями существования положительного согласованного управления $\lambda > 0$ являются следующие: если $x_{ij}^0 > 0$, то либо $s_{ij} > 0$, либо $s_{ik} = 0$ для всех k .

Доказательство. Пусть $x_{ij}^0 > 0$, $s_{ij} = 0$ и существует $s_{ik} > 0$. Тогда в силу условий согласования $\lambda_j s_{ij} = 0 \geq \lambda_k s_{ik}$ и, следовательно, $\lambda_k = 0$.

Следствие 2. Достаточными условиями существования положительного согласованного управления являются следующие: $s_{ij} > 0$ для всех i, j .

Доказательство. Пусть $\lambda_j = 0$. Если $x_{ij}^0 = 0$ для всех i , то можно положить λ_j равным любому положительному числу без нарушения условий согласования. Пусть $x_{ij}^0 > 0$. В силу теоремы,

11.2 существует $\lambda_k > 0$. Имеем, в силу условий согласования $\lambda_j s_{ij} = 0 \geq \lambda_k s_{ik} > 0$, что противоречиво.

Для получения необходимых и достаточных условий существования согласованного управления $\lambda > 0$ обозначим U множество пар (i, j) , для которых $s_{ij} > 0$; $\sigma_{ij} = \ln s_{ij}$ для всех $(i, j) \in U$, $\mu_j = \ln \lambda_j$, $v_i = \ln u_i$ (заметим, что $x_{ij}^0 = 0$ для всех $(i, j) \notin U$). Условия (3.8) при этом примут вид

$$[\max_k (\mu_k + \sigma_{ik}) - (\mu_j + \sigma_{ij})] x_{ij} = 0 \text{ для всех } (i, j) \in U, \quad (3.12)$$

или $(v_i - \mu_j - \sigma_{ij}) x_{ij} = 0$ для всех $(i, j) \in U$.

Теорема 11.3. Для того чтобы x^0 был согласованным планом, необходимо и достаточно, чтобы он обеспечивал максимум суммы

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij} \quad (3.13)$$

при ограничениях (3.4) и

$$\sum_i x_{ij} = \sum_i x_{ij}^0. \quad (3.14)$$

Доказательство. Обозначим $v = (v_1, \dots, v_n)$ и $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ и, приняв их за двойственные переменные, выпишем задачу, двойственную к задаче (3.13), (3.4), (3.14),

$$\sum_i v_i T_i - \sum_{i,j} x_{ij}^0 \mu_j \xrightarrow{v, \mu} \min$$

при ограничениях

$$v_i - \mu_j \geq \sigma_{ij} \text{ для всех } (i, j) \in U.$$

Соотношения дополняющей нежесткости совпадают с условиями согласования (3.12). Это доказывает теорему.

Аналогичную теорему можно доказать для случая $s_{ij} \leq 0$ для всех i, j и $s_{ij} < 0$ для всех i, j таких, что $x_{ij}^0 > 0$. Приведем ее формулировку.

Теорема 11.3а. Для того чтобы x^0 был согласованным планом, необходимо и достаточно, чтобы x^0 обеспечивал минимум $\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij}$ при ограничениях (3.4), (3.14), где $\sigma_{ij} = \ln(-s_{ij})$ для всех $s_{ij} < 0$.

В заключение параграфа кратко рассмотрим связь однородных и неоднородных условий согласования.

Пусть λ^1 вектор, удовлетворяющий однородным условиям согласования, λ^2 — вектор, удовлетворяющий неоднородным условиям согласования. Тогда вектор $\lambda = \gamma \lambda^1 + \lambda^2$ удовлетворяет неоднородным условиям согласования, $\gamma \geq 0$.

Действительно, обозначим Q_i множество i таких, что $x_{ij}^0 > 0$, R множество j таких, что $Q_j \neq \emptyset$. Имеем

$$\lambda_j^1 s_{ij} \geq \lambda_k^1 s_{ik} \text{ для всех } i \in Q_j, j \in R,$$

$\lambda_j^2 s_{ij} - q_{ij} \geq \lambda_k^2 s_{ik} - q_{ik}$ для всех $i \in Q_j, j \in R$, и, следовательно,
 $\lambda_j s_{ij} - q_{ij} \geq \lambda_k s_{ik} - q_{ik}$ для всех $i \in Q_j, j \in R$.

Приведем несколько простых достаточных условий неотрицательности согласованного управления $\gamma \lambda^1 + \lambda^2$. Если однородные условия согласования имеют неотрицательное решение $\lambda^1 \geq 0$ и неоднородные условия согласования имеют неотрицательное решение $\lambda^2 \geq 0$, то любое управление $\gamma \lambda^1 + \lambda^2$ является неотрицательным согласованным ($\gamma \geq 0$).

Если однородные условия согласования имеют положительное решение $\lambda^1 > 0$, а неоднородные условия согласования имеют решение λ^2 (необязательно неотрицательное), то вектор $\gamma \lambda^1 + \lambda^2$ является неотрицательным согласованным управлением при условии

$$\gamma \geq \max_j (-\lambda_j^2 / \lambda_j^1).$$

§ 4. Определение согласованного управления

В этом параграфе рассматриваются алгоритмы определения согласованного управления в случае однородных условий согласования. Как и в предыдущем параграфе, исследуется практически интересный случай $s_{ij} \geq 0$, причем если $x_{ij}^0 > 0$, то $s_{ij} > 0$. Как уже отмечалось, однородные условия согласования (3.8) можно записать в эквивалентной форме

$$\lambda_j s_{ij} \geq \lambda_k s_{ik}, \quad i \in Q_j, j \in R, \quad (4.1)$$

где $Q_j = \{i : x_{ij}^0 > 0\}$, $R = \{j : Q_j \neq \emptyset\}$.

Сначала получим более удобные необходимые и достаточные условия существования неотрицательных (положительных) решений системы (4.1), чем определяемые теоремами 11.2 и 11.3. Для этого определим m -вершинный граф $G(x^0)$ с множеством вершин $j = 1 \div m$ и множеством дуг U . Дуга $(k, j) \in U$ тогда и только тогда, когда $j \in R$ и $\max_{i \in Q_j} s_{ik} > 0$. Заметим, что если

$\max_{i \in Q_j} s_{ik} = 0$, т. е. все $s_{ik} = 0$ ($i \in Q_j$), то неравенства $\lambda_j s_{ij} \geq \lambda_k s_{ik}$ для

всех $i \in Q_j$ автоматически выполняются и их можно исключить из системы (4.1). После исключения указанных неравенств каждой дуге (k, j) графа $G(x^0)$ соответствуют вполне определенные неравенства системы (4.1), а именно

$$\lambda_j s_{ij} \geq \lambda_k s_{ik}, \quad i \in Q_j, \quad \text{где все } s_{ik} > 0.$$

Обозначим

$$\varepsilon_{kj} = \max_{i \in Q_j} \frac{s_{ik}}{s_{ij}} > 0.$$

Запишем систему (4.1) в более простом виде

$$\lambda_j \geq \varepsilon_{kj} \lambda_k, \quad j \in R, \quad k = 1 \div m. \quad (4.2)$$

Заметим, что каждой дуге (k, j) графа $G(x^0)$ взаимнооднозначно соответствует уже одно и только одно неравенство системы (4.2). Для вывода условий существования нетривиальных решений системы (4.2) определим бикомпоненты (т. е. сильносвязные компоненты) $G_1(x^0); G_2(x^0), \dots, G_s(x^0)$ графа $G(x^0)$. Обозначим $W_i(x^0), U_i(x^0)$ соответственно множества вершин и дуг бикомпоненты $G_i(x^0)$. Будем говорить, что $G_i(x^0)$ следует за $G_k(x^0)$, если вершины $W_k(x^0)$ являются предшествующими для вершин $W_i(x^0)$.

Бикомпоненты, не имеющие следующих, назовем тупиковыми.

Теорема 11.4. Для того чтобы система (4.2) имела неотрицательное, нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы система

$$\lambda_j \geq \epsilon_{kj} \lambda_k, \quad (k, j) \in U_i(x^0) \quad (4.3)$$

имела положительное решение хотя бы для одной тупиковой бикомпоненты $G_i(x^0)$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Предположим, что ни одна тупиковая бикомпонента не имеет положительного решения. Тогда, во-первых, все тупиковые бикомпоненты имеют только нулевое решение. Во-вторых, каждая вершина j графа, не принадлежащая тупиковой бикомпоненте, является предшествующей для вершин хотя бы одной тупиковой бикомпоненты и по определению графа $G(x^0)$ должна иметь $\lambda_j = 0$. Поэтому система (4.2) имеет только нулевое решение. Теорема доказана.

Итак, решение вопроса о существовании нетривиального согласованного управления $\lambda \geq 0$ свелось к проверке существования положительного решения системы (4.3) для тупиковых бикомпонент графа $G(x^0)$. Рассмотрим эту задачу для произвольного m -вершинного сильносвязного орграфа $G(W, U)$. Величину ϵ_{kj} будем называть усилением дуги (k, j) . Усилением элементарного пути (контура) графа назовем произведение усилений его дуг. Условия существования положительного решения системы (4.3) дает следующая теорема.

Теорема 11.5. Для того чтобы система (4.3) имела положительное решение, необходимо и достаточно, чтобы все элементарные контуры графа G имели усиление не больше 1.

Доказательство. Обозначим $\mu_j = \ln \lambda_j, l_{kj} = \ln \epsilon_{kj}$ для всех $(k, j) \in U$. Тогда условия (4.3) эквивалентны условиям

$$\mu_j - \mu_k \geq l_{kj} \quad \text{для всех } (k, j) \in U. \quad (4.4)$$

Таким образом, для разрешимости системы (4.3) необходимо и достаточно существование чисел $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, удовлетворяющих условиям (4.4). Эти условия соответствуют известной задаче о существовании потенциалов вершин графа, если принять l_{kj} за длину дуги (k, j) для всех $(k, j) \in U$. Необходимым и достаточным условием существования потенциалов μ

является отсутствие в графе G контуров положительной длины. Теорема доказана, так как длина любого контура равна логарифму его усиления.

Для определения согласованного управления удобно перейти к логарифмам и искать потенциалы $\{\mu_j\}$, удовлетворяющие условиям (4.4). Опишем эффективный алгоритм определения потенциалов. Положим $\mu_j^0 = 0$ для всех j . Определим итерационную процедуру изменения значений μ_j следующим образом: на каждом шаге итерации последовательно проверяем для каждой вершины j условие

$$\mu_j \geq \max_{k: (k,j) \in U} (\mu_k + l_{kj}).$$

Если это условие выполняется, то оставляем значение μ_j неизменным и переходим к следующей вершине. Если нет, то изменяем значение μ_j на новое

$$\mu_j' = \max_{k: (k,j) \in U} (\mu_k + l_{kj})$$

и переходим к следующей вершине.

Так как значения μ_j ограничены сверху для всех j , то из конечности величин изменений μ_j на каждом шаге следует, что либо значения μ_j установятся за конечное число итераций, либо система (4.4) не имеет решения. Можно показать, что число итераций, достаточное для установления значений μ_j , не превышает $(m-1)$. Если за $(m-1)$ итераций согласованное управление не получено (т. е. на m -й итерации изменилось хотя бы одно значение μ_j), то система (4.4) не имеет решения.

Пример 1. Пусть $n=5$, $m=4$. Матрица предпочтений (σ_{ij})

4	<u>6</u>	3	5
<u>8</u>	7	3	4
2	5	<u>3</u>	6
5	4	2	<u>6</u>
2	3	<u>5</u>	3

Рассмотрим план x^0 , в котором значения $x_{12}^0, x_{21}^0, x_{33}^0, x_{44}^0, x_{55}^0$ положительны, остальные x_{ij}^0 равны 0. Имеем $Q_1 = \{2\}$, $Q_2 = \{1\}$, $Q_3 = \{3, 5\}$, $Q_4 = \{4\}$. Матрица длин (l_{kj})

X	-2	-1	-1
-1	X	2	-2
-5	-3	X	-4
-4	-1	3	X

Полагаем $\mu_j^0 = 0$ для всех j . Будем обозначать μ_j^k значение μ_j на k -й итерации.

I итерация:

$$\mu_1^1 = \max [\mu_1^0; \mu_2^0 + l_{21}; \mu_3^0 + l_{31}; \mu_4^0 + l_{41}] = 0,$$

$$\mu_2^1 = \max [\mu_1^1 + l_{12}; \mu_2^0; \mu_3^0 + l_{32}; \mu_4^0 + l_{42}] = 0,$$

$$\mu_3^1 = \max [\mu_1^1 + l_{13}; \mu_2^1 + l_{23}; \mu_3^0; \mu_4^0 + l_{43}] = 3,$$

$$\mu_4^1 = \max [\mu_1^1 + l_{14}; \mu_2^1 + l_{24}; \mu_3^1 + l_{34}; \mu_4^0] = 0.$$

Значение $\mu_3^1 > \mu_3^0$. Поэтому переходим к следующей итерации.

II итерация:

$$\mu_1^2 = \max [\mu_1^1; \mu_2^1 + l_{21}; \mu_3^1 + l_{31}; \mu_4^1 + l_{41}] = 0,$$

$$\mu_2^2 = \max [\mu_1^2 + l_{12}; \mu_2^1; \mu_3^1 + l_{32}; \mu_4^1 + l_{42}] = 0,$$

$$\mu_3^2 = \max [\mu_1^2 + l_{13}; \mu_2^2 + l_{23}; \mu_3^1; \mu_4^1 + l_{43}] = 3,$$

$$\mu_4^2 = \max [\mu_1^2 + l_{14}; \mu_2^2 + l_{24}; \mu_3^2 + l_{34}; \mu_4^1] = 0.$$

Значения μ_j установились, следовательно, управление $\mu_1=0$, $\mu_2=0$, $\mu_3=3$, $\mu_4=0$ является согласованным. Управление λ такое, что $\sum_j \lambda_j = M > 0$ определяется элементарно:

$$\lambda_1 = \frac{M}{3+e^3}; \lambda_2 = \frac{M}{3+e^3}; \lambda_3 = \frac{l^3 M}{3+e^3}; \lambda_4 = \frac{M}{3+e^3}.$$

Мы уже отмечали, что согласованное управление может определяться неоднозначно. Для однозначного определения необходимы дополнительные условия. Рассмотрим в качестве такого условия требование максимальной близости в определенном смысле согласованного управления к некоторому заданному управлению μ^* . В экономических задачах управление λ играет роль вектора цен (а управление μ — вектора логарифмов цен). Согласованные цены в данном периоде функционирования могут отличаться от цен прошлого периода. Естественным является требование минимального изменения цен от периода к периоду. Формально это удобно отразить в виде условия

$$\max \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j^*}; \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j} \right) \xrightarrow{\lambda} \min, \quad (4.5)$$

что эквивалентно следующему

$$\max_j |\mu_j - \mu_j^*| \xrightarrow{\mu} \min. \quad (4.6)$$

Для определения управления μ , наиболее близкого к μ^* в смысле критерия близости (4.6), применим описанную выше итерационную процедуру, положив начальные значения $\mu_j^0 = \mu_j^*$ для всех j . Покажем, во-первых, что установившееся в результате этой процедуры управление μ будет наиболее близким по

критерию (4.6) к μ^* среди всех управлений $\mu \geq \mu^*$. Для этого добавим к графу $G(x^0)$ вершину 0 с дугами $(0, j)$, длины которых $l_{0j} = \mu_j^*$ для всех j . Применим итерационную процедуру установления потенциалов в полученном $(m+1)$ вершинном графе. Как известно, установившиеся значения μ потенциалов являются минимальными потенциалами сразу для всех j . Так как $\tilde{\mu}_j \geq \mu_j^*$, то они являются наиболее близкими к μ^* по критерию (4.6) среди всех $\mu \geq \mu^*$. Определим $\Delta = \max_j (\tilde{\mu}_j - \mu_j^*)$. Наиболее близкое к μ^* управление (в смысле критерия (4.6)) определяется следующим образом:

$$\mu_j = \tilde{\mu}_j - \frac{\Delta}{2}.$$

Действительно, $\max_j |\mu_j - \mu_j^*| = \frac{\Delta}{2}$. Предположим, что существует управление μ' такое, что $\max_j |\mu'_j - \mu_j^*| = \frac{\Delta'}{2} < \frac{\Delta}{2}$. Но тогда управление $\mu' + \frac{\Delta'}{2} \geq \mu^*$ и в то же время

$$\max_j \left(\mu'_j + \frac{\Delta'}{2} - \mu_j^* \right) \leq \Delta' < \Delta.$$

Эти соотношения противоречивы, так как

$$\max_j (\mu_j - \mu_j^*) = \Delta \leq \max_j (\mu'_j - \mu_j^*) \text{ для всех } \mu' \geq \mu^*.$$

Пример 2. Определим управление, наиболее близкое к управлению $\mu^* = (3, 2, 1, 0)$ для согласованного плана из примера 1. Положим $\mu_j^0 = \mu_j^*$ для всех $j = 1, 2, 3, 4$.

I итерация:

$$\mu_1^1 = \max [3; 2 - 1; 2 - 5; 0 - 4] = 3,$$

$$\mu_2^1 = \max [2; 3 - 2; 1 - 3; 0 - 1] = 2,$$

$$\mu_3^1 = \max [1; 3 - 1; 2 + 2; 0 + 3] = 4,$$

$$\mu_4^1 = \max [0; 3 - 1; 2 - 2; 4 - 4] = 2;$$

II итерация:

$$\mu_1^2 = \max [3; 2 - 1; 4 - 5; 2 - 4] = 3,$$

$$\mu_2^2 = \max [2; 3 - 2; 4 - 3; 2 - 1] = 2,$$

$$\mu_3^2 = \max [4; 3 - 1; 2 + 2; 2 + 3] = 5,$$

$$\mu_4^2 = \max [2; 3 - 1; 2 - 2; 5 - 4] = 2;$$

III итерация:

$$\mu_1^3 = \max [3; 2-1; 5-5; 2-4] = 3,$$

$$\mu_2^3 = \max [2; 3-2; 5-3; 2-1] = 2,$$

$$\mu_3^3 = \max [5; 3-1; 2+2; 2+3] = 5,$$

$$\mu_4^3 = \max [2; 3-1; 2-2; 5-4] = 2.$$

Получим $\tilde{\mu}_1=3$; $\tilde{\mu}_2=2$; $\tilde{\mu}_3=5$; $\tilde{\mu}_4=2$.

Определяем $\Delta = \max (0, 0, 4, 2)$. Окончательно получаем управление μ , наиболее близкое к μ^* : $\mu_1=1$, $\mu_2=0$, $\mu_3=3$, $\mu_4=0$ со значением $\max_j |\mu_j - \mu_j^*| = 2$.

Заметим, что управление $(1, 0, 3, 0)$ нельзя получить простым изменением всех составляющих управления $(0, 0, 3, 0)$, полученного в примере 1, на постоянное число.

Критерий (4.6) отражает требование абсолютной близости цен. В ряде случаев важна близость соотношений цен, что можно записать в виде

$$\max_j \left| \frac{\delta \lambda_j^* - \lambda_j}{\lambda_j} \right| = x, \quad (4.7)$$

где δ выбирается из условия минимума этой величины и равно

$$\delta = \frac{\left(2 \min_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*} \right) \left(\max_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*} \right)}{\min_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*} + \max_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*}}, \quad x = \frac{\max_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*} - \min_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*}}{\max_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*} + \min_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*}}.$$

Без ограничения общности можно принять $\min_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*} = 1$. Тогда требование минимума x эквивалентно требованию минимума $\max_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j^*}$ при условии $\lambda_j \geq \lambda_j^*$ для всех j . Последнее условие в свою очередь эквивалентно задаче определения управления $\mu \geq \mu^*$, для которого величина

$$\max_j (\mu_j - \mu_j^*) \quad (4.8)$$

минимальна. Как было показано, ее решением является $\tilde{\mu}$, наиболее близкий к μ^* среди всех векторов $\mu \geq \mu^*$. Следовательно, любой вектор $\{\tilde{\mu}_j + c\}$, где c — постоянное число, является оптимальным в смысле критерия (4.8).

Определение согласованного управления для случая неоднородных условий согласования сводится к решению системы

линейных неравенств

$$\lambda_j s_{ij} - q_{ij} \geq \lambda_k s_{ik} - q_{ik}, \quad i \in Q_j, \quad j \in R.$$

Докажем теорему, позволяющую в ряде случаев эффективно определять решение неоднородной системы, если известно решение однородной.

Теорема 11.6. Пусть план x^0 является единственным оптимальным решением задачи

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij} \xrightarrow{x} \max$$

при ограничениях (3.4) и (3.14). Тогда x^0 является согласованным планом при любых $\{q_{ij}\}$.

Доказательство. Так как x^0 — оптимальный план, то в силу теоремы 11.3 существует положительное решение однородной системы (4.1). Более того, в силу единственности оптимального плана x^0 существует положительное решение λ' однородной системы, удовлетворяющее условиям

$$\lambda'_j s_{ij} > \lambda'_k s_{ik}, \quad i \in Q_j \setminus Q_k, \quad j \in R.$$

Так как число положительных составляющих плана x^0 не больше чем $n+m-1$, то система

$$\lambda_j s_{ij} - q_{ij} = \lambda_k s_{ik} - q_{ik}, \quad i \in Q_j \cap Q_k, \quad j, k \in R \quad (4.9)$$

имеет не более $(m-1)$ уравнений и m неизвестных, и поэтому всегда разрешима. Обозначим $\{\lambda_j^*\}$ решение этой системы (если некоторые λ_j не входят в систему (4.9), то полагаем их равными 0). Определим управление $\lambda = \gamma \lambda' + \lambda^*$, ($\gamma > 0$). Покажем, что при достаточно большом γ управление λ будет согласованным. Действительно, если $i \in Q_j \cap Q_k$, то

$$\begin{aligned} (\gamma \lambda'_j + \lambda_j^*) s_{ij} - q_{ij} &= \gamma \lambda'_j s_{ij} + \lambda_j^* s_{ij} - q_{ij} = \gamma \lambda'_k s_{ik} + \\ &+ \lambda_k^* s_{ik} - q_{ik} = (\gamma \lambda'_k + \lambda_k^*) s_{ik} - q_{ik}. \end{aligned}$$

Если $i \in Q_j \setminus Q_k$, то

$$\begin{aligned} [(\gamma \lambda'_j + \lambda_j^*) s_{ij} - q_{ij}] - [(\gamma \lambda'_k + \lambda_k^*) s_{ik} - q_{ik}] &= \\ = \gamma (\lambda'_j s_{ij} - \lambda'_k s_{ik}) + [(\lambda_j^* s_{ij} - q_{ij}) - (\lambda_k^* s_{ik} - q_{ik})] &\geq 0 \end{aligned}$$

при достаточно большом γ , так как $\lambda'_j s_{ij} - \lambda'_k s_{ik} > 0$.

Пример. Матрицы (s_{ij}) и (q_{ij}) приведены ниже

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x_{11}^0 > 0$, $x_{12}^0 > 0$, $x_{21}^0 = 0$, $x_{22}^0 > 0$. Легко проверить, что x^0 — единственное оптимальное решение задачи

$$x_{11} \ln 2 + x_{12} \ln 5 + x_{21} \ln 1 + x_{22} \ln 3 \xrightarrow{x} \max$$

при условиях $x_{ij} \geq 0$,

$$x_{11} + x_{12} = T_1,$$

$$x_{21} + x_{22} = T_2,$$

$$x_{11} + x_{21} = x_{11}^0 + x_{21}^0,$$

$$x_{12} + x_{22} = x_{12}^0 + x_{22}^0.$$

Определим управление λ' . Имеем $2\lambda_1' = 5\lambda_2'$. Положим $\lambda_2' = 2$, $\lambda_1' = 5$. Заметим, что $\lambda_2' s_{22} = 6 > \lambda_1' s_{21} = 5$.

Определим управление λ^* . Имеем $2\lambda_1^* - 5 = 5\lambda_2^* - 7$, $\lambda_1^* = \frac{5}{2} \lambda_2^* - 1$. Положим $\lambda_2^* = 2$, $\lambda_1^* = 4$. Определяем управление $\lambda = \gamma\lambda' + \lambda^*$: $\lambda_1 = 5\gamma + 4$, $\lambda_2 = 2\gamma + 2$. Величина γ определяется из условия

$$\lambda_2 s_{22} - q_{22} = (2\gamma + 2)3 - 10 \geq \lambda_1 s_{21} - q_{21} = (5\gamma + 4)1 - 2.$$

Получаем $\gamma \geq 6$. Окончательно, любое управление $\lambda_1 = 5\gamma + 4$, $\lambda_2 = 2\gamma + 2$ удовлетворяет неоднородным условиям согласования при $\gamma \geq 6$. В частности, при $\gamma = 6$, получаем $\lambda_1 = 34$, $\lambda_2 = 14$.

§ 5. Эписогласованные задачи

В этом параграфе рассматриваются различные классы эписогласованных задач. Как уже отмечалось в § 1, решение эписогласованных задач можно проводить в два этапа. Сначала решается обычная задача оптимального планирования (1.3), а затем на множестве X^0 оптимальных планов этой задачи определяется согласованный. Определение согласованного плана сводится к решению системы неравенств

$$\eta_i(\lambda, x_i) \geq \max_{y \in X_i} \eta_i(\lambda, y), \quad \lambda \in L, \quad x \in X^0.$$

В качестве первого примера рассмотрим принцип ε -согласованного управления, в котором в качестве функции предпочтения принимается

$$\eta_i(\lambda, x_i) = 1 [\varphi_i(\lambda, x_i) - \varepsilon \max_{y \in X_i} \varphi_i(\lambda, y)],$$

где $\varphi_i(\lambda, x_i)$ — целевая функция i -го АЭ.

Условия согласования в задаче ε -согласованного планирования имеют вид

$$\varphi_i(\lambda, x_i) \geq \varepsilon \max_{y \in X_i} \varphi_i(\lambda, y). \quad (5.1)$$

Примем, что $\varphi_i(\lambda, x_i) > 0$ для всех $\lambda \in L$, $x_i \in X_i$. В этом случае любой план x^0 будет согласованным при достаточно малой величине $\varepsilon > 0$. Задача ε -согласованного планирования является эписогласованной, если величина ε выбирается так, чтобы оптимальный

план был согласованным. Очевидно целесообразно, чтобы план был согласованным при возможно большей величине ε . Такое требование приводит к следующей задаче согласованного управления: определить $\varepsilon \geq 0$, $\lambda \in L$ такие, что

$$\varepsilon \rightarrow \max \quad (5.2)$$

при условиях (5.1), $\lambda \in L$ и $x \in X^0$.

Пусть x^0 — единственный оптимальный план, а целевая функция имеет вид $\varphi_i(\lambda, x_i) = \sum_j \lambda_j s_{ij} x_{ij}$. Тогда задачу (5.2) определения ε -согласованного управления можно сформулировать следующим образом:

$$\varepsilon \rightarrow \max$$

при условиях

$$\sum_j \lambda_j s_{ij} x_{ij}^0 \geq \varepsilon T_i \max_k \lambda_k s_{ik}. \quad (5.3)$$

Заменим условия (5.3) более сильными:

$$\lambda_j s_{ij} \geq \varepsilon \max_k \lambda_k s_{ik}, \quad i \in Q_I, \quad j \in R. \quad (5.4)$$

Действительно, из (5.4) следует (5.3).

Рассмотрим задачу определения максимального ε и соответствующего ε -согласованного управления $\{\lambda_j\}$, удовлетворяющих (5.4). Полагая, как и в предыдущем параграфе, что все $s_{ij} \geq 0$ и $s_{ij} > 0$ для всех $i \in Q_I$, $j \in R$, приведем систему (5.4) к виду

$$\lambda_j \geq \varepsilon \lambda_k \max_{i \in Q_I} \frac{s_{ik}}{s_{ij}} = \varepsilon \varepsilon_{kj} \lambda_k, \quad k = 1 \div m, \quad j \in R, \quad (5.5)$$

где $0 < \varepsilon \leq 1$, $\varepsilon_{kj} \geq 0$ для всех (k, j) таких, что $Q_j = \emptyset$.

Необходимые и достаточные условия существования положительного согласованного управления дает теорема 11.5, если в качестве усиления дуги (k, j) графа $G(x^0)$ принять величину $\varepsilon \cdot \varepsilon_{kj}$ для всех $(k, j) \in U$. Очевидно, что при достаточно малом ε условия теоремы 11.5 будут выполняться. Поэтому задачу определения максимального ε , при котором план x^0 будет согласованным, можно поставить следующим образом: определить максимальное $\varepsilon > 0$, при котором граф $G(x^0)$ не будет иметь контуров с усилением больше 1. Эта задача эквивалентна задаче определения минимального $\delta = \ln(1/\varepsilon) \geq 0$, при котором граф $G(x^0)$ с длинами дуг $l_{kj} - \delta$ ($l_{kj} = \ln \varepsilon_{kj}$) не имеет контуров положительной длины. Опишем алгоритм ее решения для произвольного графа (без ограничения общности можно считать граф $G(x^0)$ сильно-связным).

I шаг. Определяем контур положительной длины (если таких контуров нет, то $\delta = 0$).

Пусть μ — контур положительной длины, L_μ — его длина, n_μ — число дуг. Вычисляем $\delta_1 = L_\mu/n_\mu$, $l_{ij}^1 = l_{ij}$, $(i, j) \in U$ k -й шаг. Полагаем длины дуг графа равными $l_{ij}^{k-1} - \delta_{k-1}$. Определяем контур положительной длины. Если таких контуров нет, то

$$\delta = \sum_1^{k-1} \delta_i.$$

Пусть μ — контур положительной длины L_μ , n_μ — число его дуг. Вычисляем $\delta_k = \frac{1}{n_\mu} L_\mu$.

Поскольку элементарных контуров положительной длины в графе $G(x^0)$ имеется конечное число, то алгоритм заканчивается за конечное число шагов. Заметим, что $\delta > 0$ равно максимальной средней длине контуров графа $G(x^0)$. Действительно, при длинах дуг графа $(l_{ij} - \delta)$, $(i, j) \in U$, имеем для длины любого контура μ

$$\sum_{(i,j) \in \mu} (l_{ij} - \delta) \leq 0, \text{ или } \delta \geq \frac{1}{n_\mu} \sum_{(i,j) \in \mu} l_{ij}.$$

Следовательно, $\delta = \max_\mu \frac{1}{n_\mu} \sum_{(i,j) \in \mu} l_{ij}$. Соответственно, $\varepsilon_{\max} = e^{-\delta}$.

Пример 3. Возьмем матрицу (σ_{ij}) из примера 1. Определим максимальное ε для плана x^0 , в котором $x_{11}^0, x_{23}^0, x_{31}^0, x_{42}^0, x_{54}^0$ положительны, остальные $x_{ij}^0 = 0$. Длины l_{kj} дуг (k, j) графа $G(x^0)$ приведены ниже

X	1	5	—1
3	X	4	0
1	—2	X	2
4	2	1	X

I шаг. Определяем контур $\mu_1 = (1, 2, 1)$ положительной длины $L_1 = 4$, $n_1 = 2$. Вычисляем $\delta_1 = 2$.

II шаг. Полагаем длины дуг графа равными $l_{kj}^2 = l_{kj} - 2$. Контур положительной длины $\mu_2 = (1, 3, 1)$, $L_2 = 2$, $n_2 = 2$. Вычисляем $\delta_2 = 1$.

III шаг. Полагаем длины дуг $l_{kj}^3 = l_{kj}^2 - 1 = l_{kj} - 3$. Контур положительной длины $\mu_3 = (1, 3, 4, 1)$, $L_3 = 2$, $n_3 = 3$. Вычисляем $\delta_3 = 2/3$.

IV шаг. Полагаем длины дуг графа равными $l_{kj}^4 = l_{kj}^3 - \frac{2}{3} = l_{kj} - 3\frac{2}{3}$. Контуров положительной длины нет. Поэтому $\delta = 3\frac{2}{3}$. Соответственно $\varepsilon_{\max} = e^{-11/3}$.

Рассмотренный класс эписогласованных задач характерен тем, что любой план x^0 можно сделать согласованным (при соответствующем выборе ϵ). Приведем примеры эписогласованных задач, в которых среди множества оптимальных планов найдется хотя бы один согласованный.

Обозначим $z_j = \sum_i x_{ij} s_{ij}$, ($s_{ij} > 0$ для всех i, j).

Рассмотрим задачу оптимального планирования вида: определить $x_{ij} \geq 0$, такие, что $\Psi(z_1, z_2, \dots, z_m) \rightarrow \max_z$ при условиях

$z \in A$, $\sum_{j=1}^m x_{ij} = T_i$. Пусть x^0 — оптимальное решение этой задачи, $z_j^0 = \sum_i s_{ij} x_{ij}^0$. Заметим, что все планы $x \geq 0$, удовлетворяющие

условиям $\sum_{j=1}^m x_{ij} = T_i$, $\sum_i s_{ij} x_{ij} = z_j^0$, являются оптимальными. Пока-

жем, что среди них найдется хотя бы один согласованный план для случая неоднородных условий согласования (3.2). Действительно, в силу теоремы 11.1 такой план определяется как оптимальное решение задачи (3.3) — (3.5).

Для того чтобы получить аналогичный результат для случая однородных условий согласования (3.8), предположим, что $\Psi(z)$ — строго возрастающая функция $\{z_j\}$. Рассмотрим следующую задачу: определить план $x \geq 0$ такой, что $\Psi(z) \rightarrow \max_z$ при условиях

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = T_i. \quad (5.6)$$

Пусть x^* оптимальное решение этой задачи, $z_j^* = \sum_{i=1}^n s_{ij} x_{ij}^*$. Заметим, что любой план, удовлетворяющий (5.6) и условиям $\sum_i s_{ij} x_{ij} = z_j^*$, также является оптимальным. Покажем, что среди

таких планов найдется хотя бы один согласованный. Пусть x^0 — план, удовлетворяющий условиям теоремы 11.2, т. е. являющийся оптимальным решением задачи: определить $\gamma \geq 0$, $x \geq 0$ такие, что $\gamma \rightarrow \max$ при ограничениях (3.4) и

$$\sum_i s_{ij} x_{ij} \geq \gamma z_j^*.$$

Покажем, что для плана x^0 имеет место $\sum_i s_{ij} x_{ij}^0 = z_j^*$. Заметим,

во-первых, что оптимальное значение $\gamma^0 \geq 1$, поэтому $z_j^0 \geq z_j^*$ для

всех j . Пусть $z^0 \neq z^*$. Тогда $\Psi(z^0) > \Psi(z^*)$ и z^* не может быть оптимальным решением исходной задачи. Следовательно, $z^0 = z^*$ и план x^0 является оптимальным согласованным планом.

Рассмотрим еще один пример эписогласованных задач таких, что среди множества оптимальных планов существует хотя бы один согласованный. Обозначим $z_j = \sum_i x_{ij}$, $z = \{z_j\}$ и сформулируем следующую задачу в переменных z : определить $z \geq 0$ такие, что

$$\Psi(z) \rightarrow \max$$

при ограничениях $z \in A$,

$$\sum_{j=1}^m z_j = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Пусть z^* оптимальное решение этой задачи. Для случая однородных условий согласования существование хотя бы одного согласованного плана среди планов x , удовлетворяющих условиям

$$\sum_j x_{ij} = T_i, \quad \sum_i x_{ij} = z_j^*,$$

обеспечивается теоремой 11.3. Такой план обеспечивает максимум величины $\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij}$ (см. теорему 11.3).

В предыдущих примерах эписогласованных задач либо любой план задачи можно было сделать согласованным (задачи ϵ -согласованного планирования), либо среди множества оптимальных планов существовал хотя бы один согласованный. Ниже рассматриваются эписогласованные задачи, в которых любой оптимальный план является согласованным. Это достигается благодаря тому, что условия согласования автоматически следуют из условия оптимальности задачи при определенном виде функций предпочтения.

Пример 1. Выпуск продукции в заданном отношении. Содержательное описание задачи приведено в § 2 (задача 2). Выпишем ее формальную постановку: определить цены $\lambda \geq 0$ и согласованный план $x \geq 0$, обеспечивающие максимум

$$\Psi(x) = \min_j \frac{1}{\mathcal{D}_j} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij} \quad (5.7)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = T_i, \quad (5.8)$$

и однородных условиях согласования

$$(\max_k \lambda_k s_{ik} - \lambda_j s_{ij}) x_{ij} = 0. \quad (5.9)$$

Рассмотрим задачу оптимального планирования (5.7), (5.8). Путем введения переменной $\gamma = \min_j \frac{1}{x_j} \sum_i a_{ij} x_{ij}$ задача приводится к задаче линейного программирования. Обозначим $\{u_i\}$, $\{\lambda_j\}$ — двойственные переменные и выпишем необходимые условия оптимальности решений x^0 , u^0 , λ^0 прямой и двойственной задач:

$$(u_i^0 - \lambda_j^0 a_{ij}) x_{ij}^0 = 0$$

или в эквивалентной форме

$$(\max_k \lambda_k^0 a_{ik} - \lambda_j^0 a_{ij}) x_{ij}^0 = 0. \quad (5.10)$$

Теперь легко заметить, что при $s_{ij} = k_i a_{ij}$, ($k_i > 0$) для всех i, j из условий (5.10) следуют условия согласования (5.9). Таким образом, если функции предпочтения предприятий имеют вид

$$\eta_i(\lambda, x_i) = k_i \sum_j \lambda_j a_{ij} x_{ij},$$

то задача согласованного планирования становится эписогласованной. Более того, в этом случае согласованное управление (согласованные оценки) совпадают с объективно обусловленными оценками.

Пример 2. Рассмотрим более общую модель предприятия, когда в производстве участвуют m различных производственных факторов (ингредиентов) — рабочая сила, сырье, материалы, оборудование, конечные и промежуточные продукты и др. Производство i -го предприятия использует q_i технологических способов, причем для каждого из них заданы объемы производимых ингредиентов, рассчитанные на реализацию этого способа с единичной интенсивностью, т. е. задан вектор $a_{ik} = \{a_{ik}^q, q = 1 \div m\}$, $k = 1 \div q_i$, в котором каждая из компонент a_{ik}^q указывает объем производства соответствующего (q -го) ингредиента, если она положительна, и объем его расходования, если она отрицательна (в способе k). План i -го предприятия определяется вектором $x_i = \{x_{ik}, k = 1 \div q_i\}$ с неотрицательными компонентами. Выпишем ограничения на количества выпускаемых и затрачиваемых ингредиентов

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{q_i} a_{ik}^j x_{ik} \geq b_j, \quad (5.11)$$

где b_j требуемое количество j -го ингредиента. Множество воз-

можных векторов интенсивностей x_i определим ограничением

$$\sum_{k=1}^{q_i} x_{ik} = T_i. \quad (5.12)$$

Наконец, в качестве целевой функции системы рассмотрим

$$\Psi(x) = \sum_{i,k} c_{ik} x_{ik} \xrightarrow{x} \min,$$

где c_{ik} — некоторая оценка затрат в системе при использовании на i -м предприятии k -го технологического способа с единичной интенсивностью (например, расход особо выделенного ингредиента). Обозначим $\{u_i\}$, $\{\lambda_j \geq 0\}$ двойственные переменные и сформулируем двойственную задачу

$$\sum_j b_j \lambda_j - \sum_i u_i T_i \xrightarrow{\lambda, u} \max$$

при ограничениях

$$\sum_j \lambda_j a_{ik}^j - u_i \leq c_{ik}. \quad (5.13)$$

Выпишем необходимые условия оптимальности

$$\left[u_i - \left(\sum_j \lambda_j a_{ik}^j - c_{ik} \right) \right] x_{ik} = 0,$$

или в эквивалентной форме

$$\left[\max_i \left(\sum_j \lambda_j a_{il}^j - c_{il} \right) - \left(\sum_j \lambda_j a_{ik}^j - c_{ik} \right) \right] x_{ik} = 0. \quad (5.14)$$

Теперь заметим, что условия (5.14) являются необходимыми и достаточными условиями максимума по x_i функции

$$\sum_{k=1}^{q_i} \left(\sum_j \lambda_j a_{ik}^j - c_{ik} \right) x_{ik} \quad (5.15)$$

при ограничении (5.12). Поэтому, если функция предпочтения предприятий имеет вид (5.15), то задача является эписогласованной. Как и в примере 1, в этом случае согласованные оценки совпадают с объективно обусловленными оценками.

Подобных примеров можно привести много. Во всех случаях, когда необходимые условия оптимальности задачи планирования можно интерпретировать как необходимые и достаточные условия максимума некоторых функций $\eta_i(\lambda, x_i)$ по переменным x_i , мы получаем эписогласованную задачу, если взять $\eta_i(\lambda, x_i)$ в качестве функций предпочтения активных элементов. Примером нелинейной задачи такого типа является задача производства продукции (гл. I).

§ 6. Задачи согласованного планирования транспортного и распределительного типа

Если задача является эписогласованной, то ее решение разбивается на два последовательных этапа: 1) решение задачи оптимального планирования; 2) определение согласованного управления. В этом параграфе рассматриваются два простых примера задач согласованного планирования, решение которых также сводится к последовательности двух этапов, но в обратном порядке — сначала определяется согласованное управление, а затем решается задача оптимизации на множестве согласованных планов.

Пример 1. Определить согласованный план $x \geq 0$ и согласованное управление $\lambda > 0$ такие, что $\Psi(x) \rightarrow \max$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = T_i, \quad (6.1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = B_j, \quad (6.2)$$

где $\sum_i T_i = \sum_j B_j$, и однородных условиях согласования (3.8).

Будем предполагать, что $s_{ij} > 0$ для всех i, j . Тогда необходимые и достаточные условия согласованности плана дает теорема 11.3, согласно которой любой согласованный план является оптимальным планом задачи

$$R(x) = \sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij} \xrightarrow{x} \max \quad (6.3)$$

при ограничениях (6.1), (6.2), и наоборот, любой оптимальный план этой задачи является согласованным. Обозначим R_m максимальное значение $R(x)$. Тогда условия согласования (3.8) можно заменить одним линейным условием

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij} = R_m. \quad (6.4)$$

Решение задачи согласованного планирования проводится в два этапа.

1. Решается задача, двойственная к задаче (6.3), (6.1), (6.2). В результате определяется значение R_m и согласованное управление λ^0 .

2. Решается задача оптимального планирования при дополнительном ограничении (6.4) и определяется оптимальный согласованный план x^0 . Заметим, что при добавлении ограничения (6.4), задача оптимального планирования становится эписогласованной.

Пример 2. Определить согласованный план $x \geq 0$ и согласованное управление λ такое, что $\Psi(x) \rightarrow \max$ при ограничениях (6.1)

$$\sum_i s_{ij} x_{ij} = B_j, \quad (6.5)$$

и неоднородных условиях согласования

$$\left[\max_k (\lambda_k s_{ik} - q_{ik}) - (\lambda_j s_{ij} - q_{ij}) \right] x_{ij} = 0. \quad (6.6)$$

Будем предполагать, что система (6.1), (6.5) имеет решение. Согласно теореме 11.1 любой согласованный план является оптимальным планом задачи $R(x) = \sum_{i,j} q_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$ при ограничениях (6.1), (6.5), $x \geq 0$, и наоборот, любой оптимальный план этой задачи является согласованным планом. Обозначим R_m — минимальное значение $R(x)$. Тогда условия согласования (6.6) можно заменить одним ограничением

$$\sum_{i,j} q_{ij} x_{ij} = R_m. \quad (6.7)$$

Решение задачи согласованного планирования, как и в примере 1, проводится в два этапа.

1. Решается задача, двойственная к задаче минимизации $R(x)$ при ограничениях (6.1), (6.5), $x \geq 0$. В результате определяется R_m и согласованное управление λ^0 .

2. Решается задача оптимального планирования при дополнительном ограничении (6.7).

§ 7. Оценка целевой функции оптимального согласованного плана

Задачи согласованного планирования, в общем случае, являются, как правило, многоэкстремальными, даже если соответствующая задача оптимального планирования является выпуклой. Трудности решения многоэкстремальных задач хорошо известны. Поэтому весьма актуальной является проблема оценки значения целевой функции оптимального согласованного плана. Такие оценки можно использовать в алгоритмах локальной оптимизаций для того, чтобы судить о близости локально-оптимального решения к глобальному оптимуму, а также в алгоритмах, основанных на схеме ветвей и границ для получения оценок подмножеств решений.

Рассмотрим способ получения оценок задач согласованного планирования в случае однородных условий согласования и положительной матрицы (s_{ij}) . Обозначим $z_j = \sum_i x_{ij}$, $R_m(z)$ — значение

линейной формы $\sum_{i,j} (\ln s_{ij}) x_{ij} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij}$ в оптимальном решении задачи: определить $x \geq 0$ такой, что

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij} \rightarrow \max_x, \quad \sum_j x_{ij} = T_i, \quad \sum_i x_{ij} = z_j. \quad (7.1)$$

Согласно теореме 11.3, любой согласованный план удовлетворяет условию

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij} = R_m(z). \quad (7.2)$$

Верно и обратное: любой план, удовлетворяющий условию (7.2), является согласованным. Поэтому условия согласования можно заменить ограничением (7.2) и

$$\sum_i x_{ij} = z_j. \quad (7.3)$$

Покажем, что $R_m(z)$ — выпуклая вверх функция z . Пусть x^1 — согласованный план при $z = z^1$, x^2 — согласованный план при $z = z^2$. Возьмем $z = \alpha z^1 + (1 - \alpha) z^2$, $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} R_m(z) &\geq \sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij} = \alpha \sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij}^1 + (1 - \alpha) \sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij}^2 = \\ &= \alpha R_m(z^1) + (1 - \alpha) R_m(z^2). \end{aligned}$$

Определим векторы B^j , $j = 1 \div n$ следующим образом:

$$B_k^j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq k, \\ T, & \text{если } j = k, \end{cases} \quad T = \sum_i T_i.$$

Заметим, что произвольный вектор $z = \sum_j \frac{z_j}{T} B^j$, где $\sum_j \frac{z_j}{T} = 1$, т. е.

представим в виде выпуклой линейной комбинации векторов B^j . Учитывая, что $R_m(B^j) = \sum_i T_i \sigma_{ij}$, имеем

$$R_m(z) = R_m\left(\sum_j \frac{z_j}{T} B^j\right) \geq \sum_j \frac{z_j}{T} R_m(B^j) = \frac{1}{T} \sum_{i,j} T_i z_j \sigma_{ij}.$$

Заменим условие (7.2) более слабым неравенством

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij} \geq \sum_j \tilde{\sigma}_j z_j, \quad \text{где } \tilde{\sigma}_j = \sum_i \frac{T_i}{T} \sigma_{ij}. \quad (7.4)$$

Решение задачи оптимального планирования на максимум с условиями (7.3), (7.4) вместо условий согласования дает оцен-

ку сверху для значения целевой функции оптимального согласованного плана. Условия (7.3), (7.4) можно заменить одним неравенством

$$\sum_{i,j} w_{ij} x_{ij} \geq 0, \text{ где } w_{ij} = \sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_j. \quad (7.5)$$

Пример 1. Получим оценку для задачи «экономика — внешний рынок», рассмотренной в § 2 (задача 1). Ее формальная постановка имеет вид: определить $x \geq 0$ такой, что

$$\Psi(x) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \quad (7.6)$$

при ограничениях (6.1) и однородных условиях согласования. Предположим, что $s_{ij} > 0$, и поэтому существует матрица (σ_{ij}) . Оценочная задача заключается в определении $x \geq 0$, обеспечивающего максимум (7.6) при ограничениях (6.1) и (7.5). Перейдя к двойственной задаче с переменными $\{u_i\}$ и $\gamma \geq 0$, получим после несложных преобразований оценочную задачу в следующей форме: определить $\gamma \geq 0$ такое, что

$$R(\gamma) = \sum_i \max_j (c_{ij} + \gamma w_{ij}) \rightarrow \min.$$

Обозначим $R_{\min}$ — минимальное значение $R(\gamma)$. Тогда имеем

$$\Psi_c \leq R_{\min}. \quad (7.7)$$

Пример 2. Рассмотрим задачу 2 (§ 2) (выпуск продукции в заданном отношении). Ее формальная постановка имеет вид

$$\min_j \frac{1}{\mathcal{D}_j} \sum_i a_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

при ограничениях (6.1) и однородных условиях согласования. Соответствующая оценочная задача получается заменой условий согласования ограничением (6.5). В частном случае $a_{ij} = a_j$ для всех $i = 1 \div n$ модель становится эписогласованной. Оптимальный согласованный план x^* определяется как оптимальное решение задачи максимизации $\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij}$, при ограничениях (7.1) и

$$\sum_i x_{ij} = \frac{T \mathcal{D}_j a_j}{\sum_k \mathcal{D}_k a_k} = T b_j. \text{ Условия (7.5) в данном случае всегда}$$

выполняются в силу очевидного неравенства

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij}^* \geq \sum_{i,j} \sigma_{ij} T b_j = \sum_{i,j} \tilde{\sigma}_j x_{ij}^*.$$

§ 8. Метод локальной оптимизации

Идея метода локальной оптимизации заключается в рассмотрении задачи согласованного планирования в пространстве переменных λ . Зафиксируем какое-либо значение λ и рассмотрим задачу на условный экстремум: определить план x такой, что

$$\Psi(x) \rightarrow \max \quad (8.1)$$

при ограничениях

$$x \in X, \quad (8.2)$$

$$\eta_i(\lambda, x_i) \geq \max_{y \in X_i} \eta_i(\lambda, y). \quad (8.3)$$

Примем, что $\Psi(x)$ — выпуклая вверх функция x , а X — выпуклое компактное множество. Тогда, если $\eta_i(\lambda, x_i)$ — выпуклые вверх функции x_i , то множества, определяемые неравенствами (8.3) будут выпуклыми. Следовательно, задача (8.1) — (8.3) также будет задачей выпуклого программирования. Обозначим $\Theta(\lambda)$ — значение $\Psi(x)$ в оптимальном решении этой задачи. Теперь задачу согласованного планирования можно сформулировать следующим образом: определить $\lambda \in L$, максимизирующее $\Theta(\lambda)$. Эта задача, как было показано выше, является в общем случае многоэкстремальной. Определив понятие окрестности $\varepsilon(\lambda)$ тем или иным образом, мы получим алгоритм локальной оптимизации. Каждый шаг алгоритма заключается в переходе из точки λ в точку λ' , обеспечивающую максимум $\Theta(\lambda)$ на множестве $\varepsilon(\lambda)$. Алгоритм заканчивается, если $\Theta(\lambda') - \Theta(\lambda)$ меньше заданной величины. Такова общая схема. Ее реализация определяется спецификой конкретной задачи. Рассмотрим алгоритмы решения двух задач (задачи 1 и 2 § 2) для случая однородных условий согласования. Условия согласования будем рассматривать в логарифмической форме, предполагая все s_{ij} положительными числами. Обозначая $\sigma_{ij} = \ln s_{ij}$, $\mu_i = \ln \lambda_i$, запишем условия согласования

$$\left[\max_k (\mu_k + \sigma_{ik}) - (\mu_j + \sigma_{ij}) \right] x_{ij} = 0. \quad (8.4)$$

Обозначим $Q_i(\mu) = \{j : \mu_j + \sigma_{ij} = \max_k (\mu_k + \sigma_{ik})\}$. Очевидно, в согласованном плане положительными могут быть только x_{ij} для $j \in Q_i(\mu)$. Таким образом, исходную задачу при заданном μ можно сформулировать следующим образом:

$$\Psi(x) \rightarrow \max, x \in X, x_{ij} \geq 0, j \in Q_i(\mu), x_{ij} = 0, j \notin Q_i(\mu).$$

8.1. Взаимодействие экономики с внешней средой

Целевая функция системы $\Psi(x) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$. Учитывая, что $x_{ij} > 0$ только для $j \in Q_i(\mu)$, получаем

$$c(\mu) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}(\mu) = \sum_i \max_{j \in Q_i(\mu)} c_{ij}. \quad (8.5)$$

Таким образом, задача сводится к определению управления μ , максимизирующего величину $c(\mu)$. Алгоритм локальной оптимизации для данной задачи заключается в последовательной максимизации $c(\mu)$ по одной из переменных при фиксированных значениях остальных. Рассмотрим алгоритм определения максимума $c(\mu)$ по переменной μ_s .

а) Определяем

$$\Delta_{is} = \max_{k \neq s} (\mu_k + \sigma_{ik} - \sigma_{is}).$$

Обозначим

$$Q_{is}(\mu) = \{j : j \neq s, \mu_j + \sigma_{ij} = \max_{k \neq s} (\mu_k + \sigma_{ik})\}$$

$$\theta_{is} = \max_{j \in Q_{is}(\mu)} C_{ij}.$$

Пусть $\Delta_{i_1s}, \Delta_{i_2s}, \dots, \Delta_{i_ns}$ упорядочены по возрастанию Δ_i (равные Δ_{is} упорядочиваются по убыванию $(c_{is} - \theta_{is})$, т. е. $\Delta_{i_1s} \leq \Delta_{i_2s} \leq \dots \leq \Delta_{i_ns}$, а при $\Delta_{i_qs} = \Delta_{i_{q+1}s}$ имеет место $c_{i_qs} - \theta_{i_qs} \geq c_{i_{q+1}s} - \theta_{i_{q+1}s}$).

б) Вычисляем сумму $D(l) = \sum_{q=1}^l c_{i_qs} + \sum_{q=l+1}^n \theta_{i_qs}$, $0 \leq l \leq n$,

$\left(\sum_{q=1}^0 c_{i_qs} = 0, \sum_{q=n+1}^n \theta_{i_qs} = 0 \right)$ по определению). Определяем l_m , для которого $D(l)$ принимает максимальное значение.

в) Полагаем $\mu'_s = \mu_s$, если $D(l_m) = c(\mu)$,

$\mu'_s = \Delta_{i_ms}$, если $D(l_m) > c(\mu)$.

Повторяем процедуру для следующей переменной μ_{s+1} ($\mu_{m+1} = \mu_1$, по определению) до тех пор, пока значения μ_s не установятся.

Пример. Матрицы (c_{ij}) и (σ_{ij}) приведены ниже

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ (c_{ij}) = 8 & 3 & 4 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 5 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 3 & 7 & 4 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ (\sigma_{ij}) = 2 & 6 & 4 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 3 \end{array}.$$

Возьмем начальное решение $\mu = 0$, $c(\mu) = 17$.

I шаг. Применяем описанный выше алгоритм для переменной μ_1 .

а) Определяем

$$\Delta_{11} = \max_{k \neq 1} (\sigma_{1k} - \sigma_{11}) = 8 - 3 = 5,$$

$$\Delta_{21} = \max_{k \neq 1} (\sigma_{2k} - \sigma_{21}) = 1,$$

$$\Delta_{31} = \max_{k \neq 1} (\sigma_{3k} - \sigma_{31}) = 5,$$

$$\Delta_{41} = \max_{k \neq 1} (\sigma_{4k} - \sigma_{41}) = -1,$$

$$\Delta_{51} = \max_{k \neq 1} (\sigma_{5k} - \sigma_{51}) = 6.$$

Вычисляем

$$\theta_{11} = 3, \theta_{21} = 2, \theta_{31} = 6, \theta_{41} = 2, \theta_{51} = 5.$$

Упорядочиваем Δ_{i1}

$$\Delta_{41} < \Delta_{21} < \Delta_{31} = \Delta_{11} < \Delta_{51}$$

(Δ_{31} впереди Δ_{11} , так как $c_{31} - \theta_{31} = 2 > -1 = c_{11} - \theta_{11}$).

б) Вычисляем суммы $D(l)$

$$l \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$D(l) \quad 18 \quad 17 \quad 22 \quad 24 \quad 23 \quad 23.$$

Максимальное значение $D(l)$ достигается при $l_m = 3$ и равно $24 > c(\mu)$.

в) Полагаем $\mu_1 = \Delta_{31} = 5$, $c(\mu) = 24$.

II шаг. Проводим оптимизацию по переменной μ_2 . Опуская промежуточные выкладки, будем приводить только значения $D(l)$

$$l \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$D(l) \quad 24 \quad 26 \quad 21 \quad 18 \quad 20 \quad 19$$

$$D(l_m) = D(1) = 26 > 24.$$

Полагаем $\mu_2 = \Delta_{12} = 1$, $c(\mu) = 26$.

III шаг. Проводим оптимизацию по μ_3

$$l \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$D(l) \quad 26 \quad 24 \quad 20 \quad 21 \quad 16 \quad 22$$

$$D(l_m) = D(0) = c(\mu).$$

Оставляем $\mu_3 = 0$.

IV шаг. Проводим оптимизацию по μ_4

$$l \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$D(l) \quad 26 \quad 26 \quad 25 \quad 30 \quad 29 \quad 25$$

$$D(l_m) = D(3) = 30 > 26.$$

Полагаем $\mu_4 = \Delta_{44} = 7$, $c(\mu) = 30$.

V шаг. Проводим оптимизацию по μ_5

$l \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$D(l) \quad 30 \quad 28 \quad 27 \quad 25 \quad 21 \quad 24$

$$D(l_m) = D(0) = 30 = c(\mu).$$

Оставляем $\mu_5 = 0$.

Повторяем цикл оптимизации с начальным решением $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 7$, $\mu_5 = 0$. На втором цикле получаем решение $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 4$, $\mu_4 = 7$, $\mu_5 = 0$, которое является локально-оптимальным. Соответствующий локально-оптимальный план $x_{13} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{54} = 1$ (остальные $x_{ij} = 0$) со значением $c(\mu) = 31$. Как мы убедимся далее, это решение является глобально-оптимальным.

8.2. Выпуск продукции в заданном отношении

Для задачи 2 (см. § 2) естественней записывать условия согласования в форме

$$\left(\max_k \lambda_k s_{ik} - \lambda_i s_{ij} \right) x_{ij} = 0 \quad (8.6)$$

не переходя к логарифмам. Обозначим $Q_i(\lambda) = \{j: \lambda_i s_{ij} = \max_k \lambda_k s_{ik}\}$. Очевидно, что $x_{ij} = 0$ для $j \notin Q_i(\lambda)$. Задачу загрузки при заданном управлении можно теперь сформулировать как обычную распределительную задачу

$$\begin{aligned} \gamma \rightarrow \max, \quad \sum_j x_{ij} &= T_i, \quad \sum_i a_{ij} x_{ij} \geq \gamma \mathcal{D}_j, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad x_{ij} = 0 \text{ для } j \notin Q_i(\lambda). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Обозначим $x^0(\lambda)$ — оптимальное решение, $\gamma(\lambda)$ — значение γ в оптимальном решении, $P(\lambda) = \{j: \sum_i a_{ij} x_{ij}^0(\lambda) = \gamma(\lambda) \mathcal{D}_j\}$.

Очевидно, что решение можно улучшить, увеличивая цены всех видов продукции множества $P(\lambda)$ в одно и то же число раз до тех пор, пока не появится новый поставщик, для которого выпуск продукции из множества $P(\lambda)$ является предпочтительным. Эта процедура и составляет основу алгоритма локальной оптимизации для задачи выпуска продукции в заданном отношении.

Опишем основные этапы алгоритма.

I шаг. задается начальное управление λ (обычно берется $\lambda_j = 1$ для всех j).

II шаг. Решается распределительная задача (8.7). Определяется множество $P(\lambda)$. Если $P(\lambda)$ содержит все виды продукции, то получено локально-оптимальное решение. В противном случае переходим к шагу III.

III шаг. Увеличивается λ_j ($j \in P(\lambda)$) в одно и то же число раз до тех пор, пока не появится новое предприятие, для которого выпуск хотя бы одного вида продукции из множества $P(\lambda)$ является предпочтительным. Для нового управления λ повторяем шаги II и III.

Пример. Матрицы (s_{ij}) и (a_{ij}) приводятся ниже ($n=2$, $m=4$, $T_1=T_2=10$, $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2=1$).

$$(s_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

I. Примем $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$. Имеем $Q_1(\lambda)=\{2\}$, $Q_2(\lambda)=\{3\}$. Следовательно, $\gamma(\lambda)=0$, $P(\lambda)=\{1, 4\}$. Увеличиваем λ_1 и λ_4 до величин $\alpha\lambda_1$, $\alpha\lambda_4$, определяемые из условий $\alpha=\min(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1=\min(7/6; 4/3)=7/6$, $\alpha_2=\min(7; 4/3)=4/3$. Получаем $\lambda_1=7/6$, $\lambda_4=7/6$.

II. Для управления $\lambda_1=7/6$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=1$, $\lambda_4=7/6$ имеем $Q_1(\lambda)=\{1, 2\}$, $Q_2(\lambda)=\{3\}$. Следовательно, $\gamma(\lambda)=0$, $P(\lambda)=\{4\}$. Увеличиваем λ_4 до

$$\lambda_4'=\min(7/1; 4/3)=4/3.$$

III. Для управления $\lambda_1=7/6$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=1$, $\lambda_4=4/3$ имеем $Q_1(\lambda)=\{1, 2\}$, $Q_2(\lambda)=\{3, 4\}$. Оптимальное решение распределительной задачи $\gamma(\lambda)=6^2/3$, причем $P(\lambda)=\{1, 2\}$. Увеличиваем λ_1 и λ_2 до $\alpha\lambda_1$, $\alpha\lambda_2$, где $\alpha=4 \cdot 6/3 \cdot 7=8/7$.

IV. Для управления $\lambda_1=4/3$, $\lambda_2=8/7$, $\lambda_3=1$, $\lambda_4=4/3$ имеем $Q_1(\lambda)=\{1, 2\}$, $Q_2(\lambda)=\{1, 3, 4\}$. Оптимальное решение распределительной задачи $\gamma(\lambda)=10$, причем $P(\lambda)=\{2\}$. Увеличиваем λ_2 до $\lambda_2=2$.

V. Для управления $\lambda_1=4/3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$, $\lambda_4=4/3$ имеем $Q_1(\lambda)=\{2\}$, $Q_2(\lambda)=\{1, 2, 3, 4\}$. Оптимальное решение распределительной задачи: $x_{12}=10$, $x_{21}=2^8/7$, $x_{22}=5/7$, $x_{23}=3^4/7$, $x_{24}=2^9/7$ (остальные $x_{ij}=0$), $\gamma(\lambda)=14^2/7$. Так как $P(\lambda)=\{1, 2, 3, 4\}$, то получено локально-оптимальное решение.

§ 9. Метод ветвей и границ

Для применения метода ветвей и границ необходимо

а) определить способ разбиения множества всех решений на подмножества (процедура ветвлений);

б) определить способ оценки подмножеств.

Конкретная реализация схемы ветвей и границ в существенной степени определяется спецификой конкретной задачи. Рассмотрим применение метода для задачи 1 (§ 2) для случая однородных условий согласования. Без ограничения общности примем $T_i=1$ для всех i . Обозначим $(j_1, j_2, \dots, j_s)$ подмножест-

во решений, в каждом из которых

$$x_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j_i, \\ 0, & \text{если } j \neq j_i, \end{cases}$$

т. е. определены планы для первых s АЭ.

О п р е д е л е н и е. Подмножество решений $(j_1, j_2, \dots, j_s)$ будем называть допустимым, если в нем существует по крайней мере один согласованный план.

Из теоремы 11.3 непосредственно следует, что при $s_{ij} \geq 0$, $\max_j s_{ij} > 0$, $\max_i s_{ij} > 0$ значения x_{ij}^0 являются оптимальным решением задачи

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_{ij} \rightarrow \max, \quad \sum_j x_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^s x_{ij} = \sum_{i=1}^s x_{ij}^0,$$

где $\sigma_{ij} = \ln s_{ij}$ для всех $s_{ij} > 0$ и $x_{ij} = 0$, если $s_{ij} = 0$.

Процедуру разбиения на подмножества определим теперь следующим образом: разбиваем все множество решений на подмножества $(1), (2), (3), \dots, (m)$, каждое из подмножеств (j_i) разбиваем в свою очередь на допустимые подмножества (j_1, j_2) и т. д. Для оценки сверху значения целевой функции на подмножестве $I_s = (j_1, j_2, \dots, j_s)$ определим для каждого $k > s$ множество пар (k, j) таких, что

$$\sigma_{ij_i} + \sigma_{kj} \geq \sigma_{ij_i} + \sigma_{kj_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad k = s+1, \dots, n. \quad (9.1)$$

Будем называть такие пары допустимыми. Множество допустимых пар для данного k обозначим через $R_k(I_s)$. Тогда оценка сверху $\varphi(I_s)$ для подмножества $I_s = (j_1, j_2, \dots, j_s)$ равна

$$\varphi(I_s) = \sum_{i=1}^s c_{ij_i} + \sum_{k=s+1}^n \max_{j \in R_k(I_s)} c_{kj}.$$

При разбиении подмножества $(j_1, j_2, \dots, j_{s-1})$ на ряд подмножеств $(j_1, j_2, \dots, j_s)$ необходимо проверять допустимость этих подмножеств. Заметим, что если подмножество $(j_1, j_2, \dots, j_s)$ допустимо, то проверку условий (9.1) достаточно провести только для $i=s$, так как для всех $i < s$ она была проведена на предыдущих шагах.

Опишем алгоритм для проверки допустимости подмножества $(j_1, j_2, \dots, j_s)$. Обозначим Q_j множество АЭ, для которых $j_i = j$ (т. е. $x_{ij} = 1$). Заметим, что подмножество $(j_1, j_2, \dots, j_{s-1})$ является допустимым, так как дальнейшее разбиение производится только для допустимых подмножеств. Обозначим α число множеств Q_j таких, что $Q_j \neq \emptyset$. Определим $(\alpha+1)$ вершинную сеть с входом j_s и выходом j_s' , соответствующих номеру j_s . Номера остальных вершин сети соответствуют всем остальным $(\alpha-1)$ номерам j таким, что $Q_j \neq \emptyset$. Определим длины дуг сети (k, j)

для $k, j \neq j_s$ следующим образом:

$$l_{kj} = \max_{i \in Q_j} (\sigma_{ik} - \sigma_{ij}). \quad (9.2)$$

Длины дуг (k, j_s') и (j_s, j) определим соответственно

$$l_{kj_s'} = \max_{i \in Q_{j_s}} (\sigma_{ik} - \sigma_{ij_s}), \quad (9.3)$$

$$l_{j_s j} = \max_{i \in Q_j} (\sigma_{ij_s} - \sigma_{ij}). \quad (9.4)$$

Обозначим $L(I_s)$ максимальную длину пути, соединяющего вход j_s с выходом j_s' . Для допустимости подмножества I_s необходимо и достаточно, чтобы $L(I_s) \leq 0$. Действительно, согласно теореме 11.3, для допустимости подмножества I_s необходимо и достаточно отсутствие в графе, получаемом склеиванием вершин j_s и j_s' в одну вершину, контуров положительной длины. Но контуры положительной длины, не содержащие склеенной вершины j_s , отсутствуют в силу допустимости подмножества I_{s-1} . Положительность или отрицательность длин контуров, содержащих «склеенную» вершину j_s , эквивалентна положительности или отрицательности длин соответствующих путей в сети, соединяющих вход j_s с выходом j_s' .

Для повышения эффективности работы алгоритма целесообразно очередное разбиение на подмножества производить по такому АЭ, для которого имеется наибольшее число запрещенных клеток. Поскольку в данном случае последовательность рассмотрения АЭ может не совпасть с их номерами, то для обозначения подмножеств необходимо указывать номер АЭ, по которому производилось разбиение на каждом шаге алгоритма. Так, например, подмножество, в котором определены планы для АЭ с номерами $i_1, i_2, \dots, i_s$, будем обозначать $I_s = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_s, j_s)\}$, где j_k соответствует номеру ненулевой составляющей плана i_k -го АЭ (т. е. $x_{i_k j_k} = 1$).

Рассмотрим подробно на примере применение описанного алгоритма ветвей и границ.

Пример

$$\begin{array}{cccc} 7 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ \mathbf{c} = 3 & 5 & 8 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ \sigma = 0 & 2 & 1 & 3. \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}$$

I шаг. Выбираем для первого разбиения третий АЭ. Оценим 4 подмножества $\{3, 1\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 3\}$ и $\{3, 4\}$.

а) Оценка подмножества $\{3, 1\}$. Для уменьшения вычислений для каждого i проверку условий (9.1) проводим в очеред-

ности убывания величин c_{ij} . При этом проверка для данного i прекращается, как только найдено j , удовлетворяющее условиям (9.1). Соответствующее c_{ij} подставляется в формулу оценки.

Так, для $i=1$ очередность проверки на допустимость $j=1, 2, 4, 3$, так как $c_{11} > c_{12} > c_{14} > c_{13}$. Имеем $\sigma_{31} + \sigma_{11} = \sigma_{11} + \sigma_{31} = 0$, поэтому $x_{11}=1$ допустимо. Для $i=2$ очередность проверки на допустимость $j=4, 1, 3, 2$.

Имеем $\sigma_{31} + \sigma_{24} = 2 < \sigma_{34} + \sigma_{21} = 4$, поэтому $x_{24}=1$ недопустимо. $x_{21}=1$, очевидно, допустимо.

Аналогично получаем для $i=4$ допустимо $x_{41}=1$, а для $i=5$ допустимо $x_{53}=1$.

Окончательно оценка $\varphi(3, 1) = 7 + 4 + 3 + 1 + 5 = 20$.

б) Оценка подмножества $\{3, 2\}$ $\varphi(3, 2) = 7 + 6 + 5 + 6 + 5 = 29$.

в) Оценка подмножества $\{3, 3\}$ $\varphi(3, 3) = 0 + 2 + 8 + 1 + 5 = 16$.

г) Оценка подмножества $\{3, 4\}$ $\varphi(3, 4) = 7 + 6 + 0 + 6 + 5 = 24$.

Выбираем подмножество $\{3, 2\}$ с максимальной оценкой $\varphi(3, 2) = 29$.

II шаг. Запрещенные клетки для подмножества $\{3, 2\}$ отмечены ниже звездочкой (клетка $\{3, 2\}$ обведена рамкой).

7	5	0	3	0	1	2	3
4	0	2	6	1	0	4	2
$c=3^*$	5	8^*	0^*	$\sigma=0^*$	2	1^*	3^*
1	6	0	4^*	2	1	2	0^*
1	3	5	2	0	1	5	2

Выбираем для следующего разбиения 4-й АЭ, так как в четвертой строке наибольшее число запрещенных клеток. Рассматриваем подмножества $\{(3, 2), (4, 1)\}$, $\{(3, 2), (4, 2)\}$, $\{(3, 2), (4, 3)\}$.

а) Оценка подмножества $\{(3, 2), (4, 1)\}$ $\varphi\{(3, 2), (4, 1)\} = 7 + 6 + 5 + 1 + 5 = 24$.

б) Оценка подмножества $\{(3, 2), (4, 2)\}$ $\varphi\{(3, 2), (4, 2)\} = 5 + 6 + 5 + 6 + 5 = 27$.

в) Оценка подмножества $\{(3, 2), (4, 3)\}$ $\varphi\{(3, 2), (4, 3)\} = 5 + 6 + 5 + 0 + 5 = 21$.

Выбираем подмножество $\{(3, 2), (4, 2)\}$ с наибольшей оценкой $\varphi\{(3, 2), (4, 2)\} = 27$.

III шаг. Запрещенные клетки для подмножества $\{(3, 2), (4, 2)\}$ отмечены звездочкой

7^*	5	0	3	0^*	1	2	3
4	0	2	6	1	0	4	2
$c=3^*$	5	8^*	0^*	$\sigma=0^*$	2	1^*	3^*
1^*	6	0^*	4^*	2^*	1	2^*	0^*
0^*	3	5	2	0^*	1	5	2

Для очередного разбиения выбираем пятый АЭ (пятую строку). Рассматриваем подмножества $\{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$, $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3)\}$, $\{(3, 2), (4, 2), (5, 4)\}$.

а) Оценка подмножества $\{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\} \varphi\{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\} = 5+6+5+6+3=25$.

б) Оценка подмножества $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3)\} \varphi\{(3, 2), (4, 2), (5, 3)\} = 5+6+5+6+5=27$.

в) Оценка подмножества $\{(3, 2), (4, 2), (5, 4)\} \varphi\{(3, 2), (4, 2), (5, 4)\} = 3+6+5+6+2=22$.

Выбираем подмножество $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3)\}$ с наибольшей оценкой $\varphi\{(3, 2), (4, 2), (5, 3)\} = 27$.

Заметим, что в данном случае не было необходимости проверять допустимость подмножеств, поскольку имеются всего два номера j такие, что $Q_j \neq 0$ и допустимость обеспечивается проверкой условий (9.1).

IV шаг. Запрещенные клетки для подмножества $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3)\}$ отмечены:

$$\begin{array}{ccccccc} 7^* & 5 & 0 & 3 & 0^* & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ c = 3^* & \boxed{5} & 8^* & 0^* & \sigma = 0^* & \boxed{2} & 1^* & 3^* \\ 1^* & \boxed{6} & 0^* & 4^* & 2^* & \boxed{1} & 2^* & 0^* \\ 0^* & 3^* & \boxed{5} & 2^* & 0^* & 1^* & \boxed{5} & 2^* \end{array}$$

Выбираем первую строку для очередного разбиения. Рассматриваем подмножества $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 2)\}$, $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 3)\}$, $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 4)\}$.

а) Оценка подмножества $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 2)\} \varphi\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 2)\} = 5+6+5+6+5=27$.

б) Оценка подмножества $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 3)\} \varphi\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 3)\} = 0+2+5+6+6=18$.

в) Оценка подмножества $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 4)\} \varphi\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 4)\} = 3+6+5+6+5=25$.

Выбираем подмножество $\{(1, 3), (4, 2), (5, 3), (1, 2)\}$ с наибольшей оценкой $\varphi\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 2)\} = 27$.

V шаг. На последнем шаге разбиения подмножества достаточно проверять допустимость получаемых решений в очередности убывания c_{2j} , т. е. $c_{24} > c_{21} > c_{23} > c_{22}$. Проверим допустимость решения $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 2), (2, 4)\}$. Определим сеть с вершинами 2 и 3, входом 4 и выходом 4'. Вычислим длины дуг сети

$$\begin{array}{ll} l_{23} = -4, & l_{32} = 1, \\ l_{42} = 1, & l_{43} = -3, \\ l_{24} = -2, & l_{34} = 2. \end{array}$$

Сеть показана на рис. 11.1. Длина максимального пути равна $-1 < 0$. Поэтому решение $x_{32}=x_{43}=x_{53}=x_{12}=x_{24}=1$ (остальные $x_{ij}=0$) является согласованным и оптимальным, так как значение целевой функции $c(x)$ больше оценок остальных подмножеств.

Дерево ветвлений изображено на рис. 11.2.

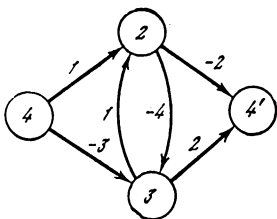


Рис. 11.1

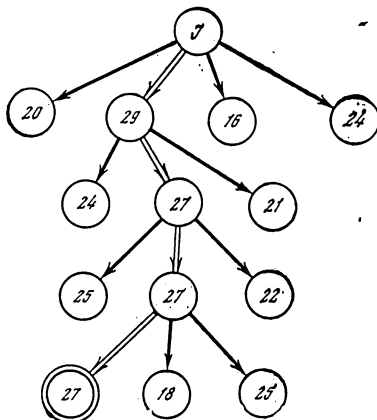


Рис. 11.2

Отметим, что в данном случае пришлось запоминать 9 подмножеств и их оценок. Число запоминаемых подмножеств и оценок можно значительно уменьшить, если иметь некоторое согласованное решение x^* со значением целевой функции $c(x^*)$. Очевидно, что если оценка $\varphi(I_s)$ подмножества I_s меньше или равна $c(x^*)$, то подмножество I_s можно не рассматривать. Чем больше $c(x^*)$, тем меньше число запоминаемых подмножеств и их оценок.

Сначала получим простую оценку снизу для оптимального согласованного решения. Эта простая оценка равна $\max_i \sum_i c_{ij} = \max(15; 19; 15; 15) = 19$ и соответствует решению $x_{12}=1$ для всех i (остальные $x_{ij}=0$). Уже эта простая оценка позволяет отбросить подмножества $\{(3, 3)\}$ и $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 3)\}$ со значениями оценок соответственно 16 и 18.

Ее можно улучшить, применив метод локальной оптимизации, что, конечно, потребует дополнительных вычислений. Однако эти вычисления окупаются последующим уменьшением числа запоминаемых подмножеств при применении алгоритма ветвей и границ. Согласованные управления для полученного решения $\mu_i=0$ для всех $j \neq 2$ и $\mu_2=4$ (или больше).

Ограничимся одним шагом метода локальной оптимизации, заключающимся в последовательном увеличении μ_j ($j \neq 2$).

а) Проводя локальную оптимизацию по μ_1 , получаем $\mu_1=3$ и новое решение $x_{12}=x_{21}=x_{32}=x_{42}=x_{52}=1$ (остальные $x_{ij}=0$)

со значением целевой функции $c(x)=23$. Теперь уже можно не запоминать подмножества $\{(3, 3)\}$, $\{(3, 1)\}$, $\{(3, 2), (4, 3)\}$, $\{(3, 2), (4, 2), (5, 4)\}$ и $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 3)\}$ со значениями оценок соответственно 16, 20, 21, 22 и 18.

б) Проводя локальную оптимизацию по μ_3 , получаем $\mu_3=0$ и новое решение $x_{12}=x_{21}=x_{32}=x_{42}=x_{53}=1$ (остальные $x_{ij}=0$) со значением целевой функции $c(x)=25$.



Рис. 11.3

К числу подмножеств, которые можно не запоминать, добавляются подмножества $\{(3, 4)\}$, $\{(3, 2), (4, 1)\}$, $\{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$, $\{(3, 2), (4, 2), (5, 3), (1, 4)\}$ со значениями оценок, соответственно, 25, 24, 25 и 25.

Остающиеся подмножества изображены на рис. 11.3. Легко видеть, что на каждом шаге ветвлений остается всего одно подмножество и запоминать ничего не нужно. Поэтому дальнейшее улучшение полученного согласованного решения нецелесообразно.

Рассмотренный пример показывает, что целесообразна следующая стратегия. Как только число запоминаемых подмножеств превышает некоторый уровень (выбираемый, например, из условия ограниченной памяти машины), делается попытка уменьшить это число путем

улучшения некоторого согласованного решения (например, методом локальной оптимизации).

Для приближенного решения задач большой размерности целесообразно применять рандомизированный метод ветвей и границ. В этом случае вероятность выбора данного подмножества при ветвлении пропорциональна величине оценки, уменьшенной на значение рекорда. Преимуществом рандомизированного метода является экономия памяти.

Для формальной записи рандомизированной схемы обозначим Q_i подмножества, полученные на некотором шаге ветвлений, φ_i — оценки этих подмножеств, Φ — значение рекорда на этом шаге. Обозначим R множество i таких, что $\varphi_i > \Phi$. Тогда вероятность p_i выбора подмножества Q_i равна

$$p_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \notin R, \\ \frac{\varphi_i - \Phi}{\sum_{i \in R} (\varphi_i - \Phi)}, & \text{если } i \in R. \end{cases}$$

После определения чисел $\{p_i\}$ подпрограмма случайного (или псевдослучайного) выбора производит выбор одного из подмножеств Q_i ($i \in R$) для очередного шага ветвлений.

Обсудим кратко основные предположения теории активных систем и перспективы ее дальнейшего развития.

1. Мы предполагали, что целевая функция центра, во-первых, известна центру и, во-вторых, совпадает с целевой функцией системы. И то, и другое, в общем случае может не выполняться. Как известно, формирование целевой функции даже сравнительно «простых» экономических систем (например, предприятия, организации) — довольно сложная задача. Целое направление науки управления связано с разработкой методик и процедур, цель которых помочь лицу (лицам), принимающему решение (в нашей терминологии — центру) сделать правильный выбор среди многих альтернатив (методы экспертных оценок, человеко-машинные процедуры принятия решений и т. д.). Ситуация облегчается тем обстоятельством, что многие выводы теории активных систем инвариантны к виду целевой функции системы (оптимальность принципа открытого управления в классе G^1 , существование оптимального прогрессивного механизма в системах с полной централизацией управления и т. д.). Это позволяет во многих случаях разделить задачу синтеза механизма функционирования системы (задачу выбора «принципов принятия решений») и задачу принятия решений. Тем не менее проблема требует дальнейших исследований. Первый шаг в этом направлении на наш взгляд следует сделать в развитии методов управления активными системами в условиях неопределенности и в задачах многокритериального выбора. Что касается различия целей центра и целей системы в целом, то в случае, если цели системы известны формально (или неформально) можно приписать их некоторому центру более высокого уровня и рассматривать задачу управления иерархической активной системой.

2. Ряд предположений относительно целевых функций элементов и их моделей может также вызвать критику и требует во всяком случае более детального экономического обоснования. Очевидно, что получение дополнительного эффекта от системы стимулирования зависит не только от направления стимула (например возрастание величины поощрения с увеличением качества выпускаемой продукции), но и от величины этого стимула. В принципе это можно учесть, введя в целевую функ-

цию элемента составляющую, имеющую смысл «внутренних» затрат элемента. Интересное развитие теории активных систем с учетом указанных факторов имеется в работах [55 и др.].

3. Мы совсем не затронули проблемы сходимости стратегий элементов к ситуациям равновесия, т. е. вопросов динамики системы. Эти вопросы подробно рассмотрены в книге В. И. Опоიცева «Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения» [13]. Определение решения игры АЭ, особенно в случае динамических моделей, также требует дальнейших исследований.

4. Применение разработанной методологии и результатов в реальных экономических системах для решения проблем совершенствования хозяйственных механизмов — безусловно одна из ближайших и важнейших задач. Определенная работа в этом направлении ведется в Институте проблем управления. Так, в работах [44, 45] проводится анализ функционирования экономических систем с позиций теории активных систем. Анализ процесса планирования работы горнодобывающего комбината рассмотрен в [46], процесса планирования НИР в отрасли — в [47, 53].

5. Вопросы, рассматриваемые в теории активных систем, являются общими вопросами построения эффективных механизмов функционирования организаций. Ряд предположений и моделей теории активных систем совпадает (или близки) с предположениями, развиваемыми в других подходах, особенно с информационной теорией иерархических систем и с содержательными постановками задач, рассматриваемых в рамках теории игр с непротивоположными интересами [9—12 и др.].

Нам представляется вполне реальной в настоящее время создание системы понятий, классификации моделей и постановок задач с тем, чтобы разработать на этой основе общую теорию управления организациями (некоторая иллюстрация такого более общего подхода, объединяющего рыночные модели с моделями оптимального планирования, предпринята автором в главе II на примере задачи производства продукции). Одна из целей книги — привлечь внимание исследователей к этой большой и сложной проблеме.

Элементы математического программирования

Рассмотрим n -мерное евклидово пространство E^n , в котором задано некоторое множество $X \subset E^n$. На множестве X определена функция $\Phi(x)$. Общая задача математического программирования заключается в определении точки $x^0 \in X$, в которой функция $\Phi(x)$ принимает максимальное (минимальное) значение, т. е.

$$\Phi(x^0) \geq \Phi(x) \text{ для любых } x \in X.$$

Множество X называется множеством допустимых решений (планов) задачи, любое $x \in X$ называется допустимым решением (планом), а точка x^0 — оптимальным решением (планом). Функция $\Phi(x)$ называется целевой функцией задачи. Задачу математического программирования будем записывать в одной из следующих форм:

$$\max_{x \in X} \Phi(x)$$

или

$$\Phi(x) \xrightarrow{x} \max, x \in X,$$

читая это так: определить x , максимизирующее $\Phi(x)$ на множестве X .

Мы приведем только те результаты теории математического программирования, которые необходимы для чтения книги. В задачах, которые рассматриваются в книге, как правило, функция $\Phi(x)$ является непрерывной по своим переменным, а множество X — замкнутым, ограниченным и не пустым.

В этом случае задача математического программирования всегда имеет решение (теорема Вейерштрасса).

1. Метод множителей Лагранжа. Пусть множество X определяется системой ограничений

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_j. \quad (1.1)$$

Определим функцию Лагранжа (лагранжиан) следующим образом:

$$L(x, y) = \Phi(x) + \langle y, b - g(x) \rangle = \Phi(x) + \sum_{j=1}^m y_j(b_j - g_j(x)),$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ — множители Лагранжа.

Рассмотрим теперь задачу на безусловный максимум функции Лагранжа по $\mathbf{x}$, т. е.

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \xrightarrow{\mathbf{x}} \max.$$

Обозначим $\mathbf{x}^0(\mathbf{y})$ оптимальное решение этой задачи. Предположим, что нам удалось подобрать такие значения множителей Лагранжа $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$, что $\mathbf{x}^0(\mathbf{y}^0) \in X$, т. е. удовлетворяет ограничениям (1.1). В этом случае для любого $\mathbf{x} \in X$ имеет место

$$L(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \Phi(\mathbf{x}^0) + \langle \mathbf{y}^0, \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \rangle = \Phi(\mathbf{x}^0) \geq \Phi(\mathbf{x}),$$

так как $\mathbf{x} \in X$. Поэтому $\mathbf{x}^0$ — оптимальный план исходной задачи.

Таким образом, решение задачи математического программирования при ограничениях типа равенств (1.1) методом множителей Лагранжа заключается в следующем: решается задача на максимум функции Лагранжа по переменным $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Оптимальный план этой задачи, очевидно, является функцией от множителей Лагранжа $(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Затем множители Лагранжа выбираются таким образом, чтобы получить план $\mathbf{x}^0(\mathbf{y})$, удовлетворяющий ограничениям (1.1). Если зависимость $\mathbf{x}^0(\mathbf{y})$ получена в явном виде, то для определения $\mathbf{y}^0$ достаточно решить систему уравнений

$$g_j[\mathbf{x}^0(\mathbf{y})] = b_j. \quad (1.2)$$

2. Задача линейного программирования. В задаче линейного программирования целевая функция является линейной

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n c_i x_i. \quad (2.1)$$

Множество X описывается системой линейных неравенств (или равенств)

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j \quad (2.2)$$

и условиями неотрицательности переменных $x_i \geq 0$. В теории линейного программирования важную роль играет двойственная задача. Для построения задачи, двойственной к исходной (2.1), (2.2) (последняя называется прямой задачей), поставим в соответствие каждому ограничению (2.2) переменную $y_j \geq 0$ и сформулируем следующую задачу

$$B(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^m b_j y_j \xrightarrow{\mathbf{y}} \min, \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ji} y_j \geq c_i. \quad (2.4)$$

Задача (2.3), (2.4) называется двойственной к (2.1), (2.2), а переменные $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ — двойственными переменными. Отметим, что двойственной к задаче (2.3), (2.4) является задача (2.1), (2.2) так, что понятия прямой и двойственной задач относительны.

Заметим, что для любых допустимых планов x и y имеет место

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ji} y_j x_i \leq \sum_{j=1}^m y_j b_j = B(y), \quad (2.5)$$

т. е. значение целевой функции прямой задачи всегда меньше (или равно) значения целевой функции двойственной задачи. Поэтому если нам удалось найти такие допустимые x^0 и y^0 , что

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i^0 = \sum_{j=1}^m b_j y_j^0, \quad (2.6)$$

то x^0 является оптимальным решением прямой задачи, а y^0 — оптимальным решением двойственной. Приведем без доказательства основную теорему теории линейного программирования.

Теорема. Если одна из задач имеет решение (т. е. соответствующая система ограничений совместна и значение целевой функции в оптимальном решении конечно), то вторая задача также имеет решение, причем для оптимальных решений прямой и двойственной задач имеет место соотношение (2.6).

Из теоремы легко следуют важные условия: для того чтобы x^0 , y^0 были оптимальными решениями прямой и двойственной задач соответственно необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения дополняющей нежесткости:

$$\text{если } \sum_{j=1}^m a_{ji} y_j^0 > c_i, \text{ то } x_i^0 = 0, \quad (2.7)$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i^0 < b_j, \text{ то } y_j^0 = 0.$$

Действительно, в противном случае знак равенства в (2.5) невозможен. Если некоторые (или все) ограничения системы (2.2) являются равенствами, то в двойственной задаче на соответствующие этим ограничениям двойственные переменные условия неотрицательности не накладываются.

Глава I. Задача производства продукции рассмотрена в [22].
Ход рассуждений и идеи доказательств аналогичны задаче распределения ресурсов (задача распределения сырья, гл. III, 1).
Последняя подробно исследовалась в работах [15, 24].

Принцип открытого управления впервые предложен в 1969 г. [18] для решения задачи загрузки прокатных станов и развит в [40] на более общие модели. Работы по теории активных систем до 1972 г. были в основном связаны с исследованием принципа ОУ и принципа СУ на различных моделях, разработкой методов решения задач согласованного планирования (гл. XI) и исследованием проблемы стимулирования достоверной информации (гл. VI). Дело в том, что процедура оценки эффективности функционирования системы является довольно сложной. Действительно, необходимо определить гарантированное относительное значение целевой функции центра на множестве решений соответствующей игры. Тем более сложной представлялась и задача определения оптимального закона управления на некотором множестве законов управления. Определенный прогресс в этом направлении связан с доказательством Бурковым и Опоицевым теорем о слабом влиянии и квазиинвариантности для задачи распределения ресурсов [15]. Эта работа была началом серии работ по исследованию условий слабого влияния и доказательству теорем о квазиоптимальности принципа открытого управления [17, 25, 26]. Идея обобщенных оценок и дифференцированных цен принадлежит автору. Обобщенные оценки для задачи производства продукции подробно исследованы Щепкиным [52]. Нормирование целевых функций как способ повышения эффективности функционирования системы впервые рассмотрено в работе [24] для задачи распределения ресурсов. Исследование для более общего случая выполнено В. В. Кондратьевым.

Гипотеза слабого влияния существенно упростила анализ ситуаций равновесия. Принятие этой гипотезы позволяет доказать теорему об оптимальности принципа открытого управления для моделей весьма общего вида (гл. IX).

Ряд простых задач критериального управления рассмотрен в [25]. Задача разбиения предприятий на группы с введением

для каждой группы своей цены продукции исследована автором совместно с В. И. Молчановой.

Анализ системы при сильных штрафах рассматривался ранее для задачи распределения ресурсов [24] и для модели «потребители — производители» [17]. Там же проведено исследование адаптивного способа формирования данных.

Гипотеза слабого влияния (СВ)₂ при анализе гарантирующих стратегий предложена еще в работах [18, 40]. Материал § 11 является оригинальным.

Задача производства продукции послужила основой для разработки деловой игры «План» [2]. Эта игра широко используется в вузах и на курсах повышения квалификации руководителей кадров как метод активного обучения.

Результаты § 12 получены автором, А. Г. Ивановским и Э. Б. Максимовым и публикуются впервые. Используемое здесь понятие решения игры для соревновательных систем рассмотрено в [8].

Глава II. Материал главы является в основном оригинальным. Предложенная классификация систем по степени централизации управления не является общепринятой и отражает точку зрения автора. Подход к исследованию рыночных систем, учитывающий влияние фирм на цену, аналогичен применяемому в теории фирмы [3]. Гипотеза слабого влияния, по существу, приводит в рыночных системах к моделям конкурентного равновесия [14]. Анализ систем с полной децентрализацией планирования выполнен по аналогии с соответствующим исследованием задачи распределения ресурсов [24], но гораздо более детально. В отличие от известных подходов к исследованию систем децентрализованного управления существенно новым здесь является учет степени дальновидности элементов. Результаты § 4 получены совместно с В. В. Кондратьевым. Теорема 2.1 приводится впервые. Основной качественный вывод главы — повышение эффективности функционирования системы при повышении степени централизации управления — представляется достаточно очевидным. Тем не менее обращаем внимание на важное условие прогрессивности механизма функционирования системы, без которого этот вывод в общем случае не верен.

Термин «управление» используется в главе в двух смыслах. В более общем смысле это управление (λ, x) , включающее собственно управление λ и план x АС, в более частном смысле — это собственно управление λ . Когда говорится о повышении степени централизации управления (в частности, о системах с полной централизацией управления), то имеется в виду управление (λ, x) в общем смысле. Когда говорится о системах с полной децентрализацией планирования или с частичной централизацией планирования при полной централизации управления, то имеется в виду управление λ в частном смысле. Надеемся, что это не вызовет путаницы при чтении.

Глава III. Задача распределения сырья как задача распределения ресурсов исследована Бурковым и Опойцевым [24, 15] весьма подробно. Ряд результатов (теоремы о слабом влиянии, теорема о квазиинвариантности) Бурковым и Кондратьевым обобщены для задачи распределения многомерного ресурса [26]. Адаптивный способ формирования данных для задачи распределения ресурсов подробно исследован Кондратьевым [51].

Исследование задачи управления сложным проектом для случая независимых операций выполнено Черкашиным [53]; результаты для случая последовательно параллельной сети получены автором совместно с Черкашиным. Наконец, случай независимых проектов с заданными директивными сроками их завершения рассмотрен автором. На основе задачи распределения сырья и задачи управления сложным проектом разработаны деловые игры «Ресурс» [48, 2] и «Ремонт», используемые в исследовательских и учебных целях.

Глава IV. Анализ ситуаций равновесий для задачи выпуска продукции в заданном отношении и теорема 4.1 приводится впервые. Однако ход рассуждений здесь аналогичен соответствующим результатам для задачи назначения проектов [23]. Теорема 4.2 доказана Бурковым и Ивановским [40] и распространена на другие модели в [21]. Заметим, что первое обоснование достоверности сообщаемой информации для принципа ОУ было проведено в работах [18, 40] при довольно оригинальном предположении о поведении элементов. Во-первых, предполагалась гипотеза (СВ)₁, а во-вторых, каждый элемент выбирал стратегию из условия: получить максимум гарантированного результата при любом управлении $\lambda \in L$ (а не только при гарантирующем управлении $\lambda^*(s_i)$). Очевидно, что в общем случае может не существовать стратегии s_i , обеспечивающей максимум гарантированного результата при любом управлении $\lambda \in L$. Тем не менее для принципа открытого управления такое предположение вполне корректно, поскольку сообщая оценку $s_i = r_i$, АЭ получает максимальный гарантированный результат при любом $\lambda \in L$ (в силу условий совершенного согласования).

Результаты, связанные с проверкой правдоподобности гипотез (СВ) приводятся впервые. Экспериментальное исследование ситуаций равновесия (игры автоматов) описано в [43, 50].

Материал § 2 (планирование выпуска новых приборов) также публикуется впервые. Задача назначения проектов подробно исследована в [23], где приведена теорема 4.3. Теорема 4.4 приводится впервые. Другое доказательство этой теоремы сообщил автору А. И. Шафир. Исследование гарантирующих стратегий проведено в [19].

На основе задачи «выпуск продукции в заданном отношении» и задачи назначения проектов разработаны деловые игры «Загрузка прокатных станов» и «Проект», используемые в ис-

следовательских целях [37], а также как метод активного обучения [2, 49].

Глава V. Материал первых двух параграфов оригинален и является краткой иллюстрацией особенностей, возникающих при исследовании иерархических и динамических систем.

Изложение § 3 основано на работе [4].

Глава VI. Начало теории активных систем можно связать с исследованием законов стимулирования для случая простого активного элемента [16] (в этой работе понятие «активная система» как раз и соответствовало понятию «простой активный элемент»). Способность АЭ устанавливать границу ω состояния АЭ была впервые рассмотрена Бурковым и Горгидзе [29]. Материал § 2 является развитием этой работы. Вопросы стимулирования достоверной информации при встречном способе формирования данных детально исследованы Ивановским, Горгидзе и автором [27, 28, 30]. Изложение § 5 следует работе [4]. Вопросы переоценки и прогноза, а также проблема синтеза законов стимулирования рассмотрены в [32].

Глава VII. Материал этой главы, а также глав VIII и IX написан на основе цикла статей автора и В. В. Кондратьева «Двухуровневые активные системы». В свою очередь этот цикл статей является развитием и обобщением идей, понятий и результатов, изложенных в работах [15, 17, 26].

Остановимся на понятии системы с независимыми элементами. Важность исследования систем этого класса обусловлена тем, что эффективность функционирования АС (центра) определяется в точках решения игры (в некоторых устойчивых ситуациях). Поэтому задача оценки эффективности функционирования АС является задачей статики. Это позволяет исследование любой системы проводить путем исследования некоторой системы с независимыми элементами. Для построения такой системы достаточно, например, ввести в целевые функции АЭ сильные штрафы в случае, если $y \notin Y$, и рассматривать множе-

ство $\prod_{i=1}^n Y_i$ в качестве множества возможных реализаций. Понятно, что в любом устойчивом решении игры $y^* \in Y$. Поэтому оценка эффективности функционирования системы с независимыми элементами будет определять оценку эффективности функционирования исходной системы.

Организация соревнования как способ критериального управления является мощным средством повышения эффективности функционирования системы. Идею формализации и тем самым теоретического исследования механизма соревнования выдвинул академик В. А. Трапезников. В институте проблем управления ведутся исследования по анализу и синтезу механизмов соревнования с позиций теории активных систем. В работах [48, 2] описана деловая игра «Соревнование», которая

служит иллюстрацией эффекта соревнования и исследования различных систем распределения премий. Объем книги не позволяет остановиться на этом актуальном направлении более подробно.

Глава VIII. При определении решения игры активных элементов мы следовали в основном подходу, развитому проф. Гермейером и его учениками [11, 12], сочетая его с идеями устойчивости (понятия устойчивого решения игры и глобально устойчивого множества решений).

Важно отметить, что введенное понятие устойчивого решения корректно только в том случае, когда стратегия u_i^k , выбираемая согласно правилу (1.2) зависит только от стратегий $u^k(i)$, u^{k-1} и параметров, не зависящих от номера партии. Если это не так, то при выполнении условия $u^k = u^{k-1}$ нельзя гарантировать, что $u^q = u^{k-1}$ для всех $q > k$. В частности, при исследовании динамических задач такое определение устойчивого решения уже не будет в общем случае корректным.

При описании игры, в каждой партии которой игроки делают два хода, мы ввели понятия стратегии первого хода и стратегии второго хода. В теории игр более принято название — выбор альтернативы первого (соответственно второго) хода. Мы пошли на небольшое отклонение от принятой терминологии, поскольку рассматриваемые нами игры в два хода, как правило, сводятся к играм в один ход в каждой партии. А для таких игр выбор альтернативы является стратегией.

Глава IX. Основным результатом главы безусловно является теорема 9.3 об оптимальности законов открытого управления в классе G^1 . Интересно отметить, что принцип ОУ был предложен в 1969 г. Предположение, что он является оптимальным в некотором классе законов управления было высказано в 1972 г. [17]. В 1974 г. это предположение было доказано для задачи распределения ресурсов [26]. И только в 1975 г. были окончательно определены условия на законы управления (класс G^1) и доказана теорема об оптимальности принципа ОУ. Теорема 9.8 является обобщением соответствующей теоремы 2.1 в главе II и приводится впервые.

Глава X. Глава написана на основе результатов автора и В. В. Кондратьева (краткое изложение этих результатов имеется в обзоре [5]). Ряд результатов был получен ранее Бурковым [21] (теоремы 10.1, 10.2, результаты § 5 по анализу линейных функций предпочтения).

Глава XI. Методы решения задач согласованного планирования рассматривались в работах автора, Ивановского и Горгидзе [36, 41, 42]. Теоремы 11.1, 11.2 доказаны в [21]. Теорема 11.3 непосредственно следует из результатов работы [33]. Теорема 11.5 приведена впервые в [40]. Методы определения согласованного управления (согласованных оценок) оптимальных по какому-либо критерию (например, по критерию близости

сти к некоторому заданному управлению) рассмотрены А. Г. Ивановским в его диссертационной работе. Там же приведены различные постановки задач согласованного планирования производства и потребления металлопродукции (некоторые из них описаны в [20, 31, 39]). Теорема 11.6 приводится впервые. Примеры эписогласованных задач приведены в работах [34, 6]. Материал § 7 основан на работе [33]. Описание методов локальной оптимизации и ветвей и границ для задачи взаимодействия экономики с внешней средой следует диссертационной работе И. А. Горгидзе. Применение указанных методов и решение различных задач согласованного планирования рассмотрено в работах Буркова и Ивановского [35, 38].

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$x_i = \{x_{ij}, j=1 \div p_i\}$ — план i -го АЭ

$y_i = \{y_{ij}, j=1 \div p_i\}$ — реализация плана i -го АЭ

$r_i = \{r_{ij}, j=1 \div m_i\}$ — параметры модели i -го АЭ

$Y_i(r_i)$ — множество возможных реализаций i -го АЭ

$B_i(x_i, r_i)$ — множество возможных реализаций i -го АЭ при плане x_i

$X_i(r_i)$ — множество реализуемых планов i -го АЭ ($X_i(r_i) = Y_i(r_i)$)

$x = \{x_i, i=1 \div n\} = \{x_i\}$ — план АС

$y = \{y_i, i=1 \div n\} = \{y_i\}$ — реализация плана АС

$r = \{r_i, i=1 \div n\} = \{r_i\}$ — параметры модели АС (совокупность параметров АЭ)

$Y(r)$ — множество реализаций АС $\left(Y(r) \subset \prod_{i=1}^n Y_i(r_i) \right)$

$X(r)$ — множество реализуемых планов АС ($X(r) = Y(r)$)

$\lambda = \{\lambda_j, j=1 \div l\} = \{\lambda_j\}$ — управление в АС

L — множество допустимых управлений

$f_i(\lambda, x_i, y_i)$ — целевая функция i -го АЭ в рассматриваемом периоде функционирования

$\varphi_i(\lambda, x_i, r_i) = \max_{y_i \in B_i(x_i, r_i)} f_i(\lambda, x_i, y_i)$ — целевая функция i -го АЭ с учетом правила выбора реализации

$\Phi(\lambda, x, y)$ — целевая функция центра (системы)

$\Psi(\lambda, x, r)$ — гарантированное значение целевой функции центра (системы) при плане x и управлении λ с учетом правила выбора реализаций АЭ

Ω_i — множество возможных значений r_i с позиций центра (информированность центра о параметрах модели i -го АЭ)

Ω — множество возможных значений параметров r с позиций центра

$$\left(\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i \right)$$

$s_i = \{s_{ij}, j = 1 \div m_i\}$ — оценка параметров r_i , сообщаемая АЭ i в центр ($s_i \in \Omega_i$)

$s = \{s_i, i = 1 \div n\} = \{s_i\}$ — совокупность оценок параметров $r = \{r_i\}$, сообщаемая всеми АЭ

$\pi(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$ — закон управления в АС

1. *Трапезников В. А.* Человек в системе управления.— *АиТ*, 1972, № 2.
2. *Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Немцева А. Н., Щепкин А. В.* Организация и проведение деловых игр (методические материалы). М., ИАТ, 1975.
3. *М. Интригатор.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., «Прогресс». 1975.
4. *Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Бексеитов Ж. И.* Управление стохастическими активными системами.— В кн.: *Согласованное управление*. М., ИАТ, 1975.
5. *Бурков В. Н., Емельянов С. В.* Теория активных систем (обзор).— В кн. *Согласованное управление*. М., ИАТ, 1975.
6. *Ивановский А. Г., Горгидзе И. А.* Об одной эписогласованной модели.— В кн.: *Согласованное управление*. М., ИАТ, 1975.
7. *Воробьев Н. Н.* Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. Изд-во ЛГУ, 1974.
8. *Сандак Н. Н.* Соревновательные системы.— В кн.: *Активные системы*. М., ИАТ, 1974.
9. *Гермейер Ю. Б., Моисеев Н. Н.* О некоторых задачах иерархических систем управления.— В кн.: *Проблемы прикладной математики и механики*. М., «Наука», 1971.
10. *Моисеев Н. Н.* Информационная теория иерархических систем.— «Труды I Всесоюзной школы-семинара по управлению большими системами». Тбилиси, «Мецниереба», 1973.
11. *Гермейер Ю. Б., Вателъ И. А., Ерешко Ф. И., Кононенко А. Ф.* Игры с непротивоположными интересами.— «Труды I Всесоюзной школы-семинара по управлению большими системами». Тбилиси, «Мецниереба», 1973.
12. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. Изд-во МГУ, 1972.
13. *Опоицев В. И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М., «Наука», 1977.
14. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М., «Мир», 1972.
15. *Бурков В. Н., Опоицев В. И.* Метаигровой подход к управлению активными системами.— *АиТ*, № 1, 1974.
16. *Бурков В. Н.* Планирование производства в задачах материально-технического снабжения.— «Труды II Всесоюзной конференции по оперативному управлению (Ленинград, 1968)».— В сб.: *Оперативное управление производством*. М., «Наука», 1971.
17. *Бурков В. Н., Емельянов С. В.* Управление активными системами.— В кн.: *Активные системы*. М., ИАТ, 1973.
18. *Бурков В. Н.* и др. О методах стимулирования достоверности спроса и размещения заказов в условиях оптовой торговли.— «Труды VI Международного симпозиума по материально-техническому снабжению». Тбилиси, ЦНИИ ТЭИМС, 1969.
19. *Бурков В. Н.* Принципы управления многоуровневыми активными системами. Международный симпозиум по проблемам организационного управления и иерархическим системам.— Рефераты докладов, ч. I. М., ИАТ, 1972.
20. *Ивановский А. Г.* Задача согласованного планирования двух отраслей.

- XVIII конференция молодых специалистов ИАТ. 1971.— В кн.: Системы управления. М., «Наука», 1972.
21. Бурков В. Н. Принцип согласованного управления: — В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1974.
 22. Бурков В. Н. Теория активных систем.—Systems Science N 1—2, 1976.
 23. Бурков В. Н., Макаров И. М., Соколов В. Б. Централизованное управление активными системами.— АИТ, 1973, № 8.
 24. Бурков В. Н., Опоицев В. И. Распределение ресурсов в активной системе.— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1973.
 25. Бурков В. Н., Емельянов С. В., Опоицев В. И. Управление активными системами.— «Труды I Всесоюзной школы-семинара по управлению большими системами». Тбилиси, «Мецниереба», 1973.
 26. Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Квазиоптимальность принципа открытого управления в задаче распределения ресурсов. VI Всесоюзное совещание по проблемам управления.— Рефераты докладов, ч. I. М., «Наука», 1974.
 27. Ивановский А. Г. Задачи стимулирования и получения объективных данных в активных системах.— АИТ, 1970, № 8.
 28. Горгидзе И. А. Анализ законов стимулирования в активных системах.— «Сообщения АН ГССР», 1971, т. 63, № 2.
 29. Бурков В. Н., Горгидзе И. А. Принцип адаптивного планирования в активных системах.— «Сообщения АН ГССР», 1971, т. 64, № 3.
 30. Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Немцева А. Н. Простой активный элемент.— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1973.
 31. Ивановский А. Г. Согласованное управление в экономических системах.— «Труды I Всесоюзной школы-семинара по управлению большими системами». Тбилиси, «Мецниереба», 1973.
 32. Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Горгидзе И. А. Простой активный элемент. Реализация плана и переоценка будущего состояния. Синтез функций дохода.— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1974.
 33. Бурков В. Н., Горгидзе И. А. Оценка решения задачи согласованного планирования для одного класса активных систем.— «Сообщения АН ГССР». 1971, т. 61, № 1.
 34. Горгидзе И. А. Стимулирование и согласование в активных системах.— «Тезисы ИФАК/ИФОРС симпозиума по прикладным аспектам методов оптимизации». Болгария, 1974.
 35. Бурков В. Н., Ивановский А. Г. Оптимизация согласованных планов.— «Тезисы симпозиума ИФАК/ИФОРС по прикладным аспектам методов оптимизации». Болгария, 1974.
 36. Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Горгидзе И. А. Некоторые задачи управления активными системами.— В кн.: Актуальные вопросы технической кибернетики. М., «Наука», 1972.
 37. Ивановский А. Г. Деловой эксперимент по согласованной загрузке прокатных станов.— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1973.
 38. Бурков В. Н., Ивановский А. Г. Решение задачи согласованного межотраслевого планирования.— «Материалы Всесоюзного совещания по вопросам единства методики и типизации ОАСУ», ч. II. Баку, Аз. НИИ НТИ, 1971.
 39. Ивановский А. Г. Проблема согласованного планирования в активных системах. Международный симпозиум по проблемам организационного управления и иерархическим системам.— Рефераты докладов. М., ИАТ, 1972.
 40. Бурков В. Н., Ивановский А. Г. Планирование в системе материально-технического снабжения на основе принципа открытого управления.— «Материалы симпозиума по проблемам создания АСУ МТС». М., НИИМС, 1970.
 41. Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Горгидзе И. А. Оптимизация модели экономики на основе принципа открытого управления.— В кн.: Вопросы экономико-математического моделирования. Изд-во МГУ, 1971, вып. 6.
 42. Горгидзе И. А. Об одной модели межотраслевого планирования сельскохозяйственного производства.— «Труды ВЦ АН ГССР», 1971, вып. 1.
 43. Кондратьев В. В., Нуриев Ф. С., Щепкин А. В. Анализ ситуации равно-

- ...веса в активной системе для задачи загрузки.— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1974.
44. Бурков В. Н. Учет субъективного фактора при анализе экономических систем.— В кн.: Роль объективного и субъективного в управлении производством. М., «Экономика», 1972.
 45. Бурков В. Н., Немцева А. Н. Анализ некоторых подходов к оптимальному планированию в экономических системах.— «Труды I Всесоюзной школы-семинара по управлению большими системами». Тбилиси, «Мецниереба», 1973.
 46. Голос А. А., Кимельман Э. А., Школьник М. И. Деловая игра «Производственная программа добывающего комбината».— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1974.
 47. Бурков В. Н., Немцева А. Н., Дьяченко В. Б. Планирование НИР в отрасли.— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1974.
 48. Бурков В. Н., Немцева А. Н., Соколов В. Б. Деловые игры «Ресурс», «Соревнование», «Общество».— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1973.
 49. Горгидзе И. А. и др. Деловая игра «Проект».— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1973.
 50. Кондратьев В. В., Щепкин А. В. Реализация деловых игр на ЭВМ.— В кн.: Активные системы. М., ИАТ, 1974.
 51. Кондратьев В. В. Согласованное планирование в активных системах при адаптивном способе формирования данных.— В кн.: Согласованное управление. М., ИАТ, 1975.
 52. Щепкин А. В. Обобщенные оценки в законах управления активными системами.— В кн.: Согласованное управление. М., ИАТ, 1975.
 53. Черкашин А. М. Вопросы исследования отраслевой системы приема и размещения заказов на новую продукцию (на примере отрасли приборостроения).— В кн.: Согласованное управление. М., ИАТ, 1975.
 54. Бексейтов Ж. И. Линейная модель стимулирования многопродуктового производства.— В кн.: Согласованное управление. ИАТ, 1975.
 55. Волков А. А., Коломиец Б. К. Формирование целей в активной иерархической системе управления.— В кн.: Сборник докладов семинара «Прикладные вопросы теории систем и системотехники». М., МДНТП, 1973.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Раздел I. АКТИВНОСТЬ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	5
Глава I. Задача производства продукции	5
§ 1. Описание модели	5
§ 2. Принцип жесткой централизации	9
§ 3. Принцип открытого управления	15
§ 4. Принцип согласованного управления	28
§ 5. Гипотеза слабого влияния	31
§ 6. Теорема о слабом влиянии и квазинвариантности	33
§ 7. Оптимальность принципа открытого управления	36
§ 8. Критериальное управление	39
§ 9. Сильные штрафы	42
§ 10. Адаптивный способ формирования данных	46
§ 11. Анализ гарантирующих стратегий	48
§ 12. Стимулирование и соревнование	52
Глава II. Централизация и децентрализация управления	57
§ 1. Степень централизации	57
§ 2. Анализ рыночной системы	59
§ 3. Полная децентрализация планирования	61
§ 4. Оптимальность систем с полной централизацией управления	66
Глава III. Задачи распределения ресурсов	70
§ 1. Распределение сырья	70
§ 2. Управление сложным проектом	73
Глава IV. Линейные модели	84
§ 1. Выпуск продукции в заданном отношении	84
§ 2. Планирование выпуска новых приборов	90
§ 3. Задача назначения проектов	94
Глава V. Некоторые обобщения	106
§ 1. Иерархические системы	106
§ 2. Динамические модели	113
§ 3. Стохастические активные системы	119

Глава VI. Простой активный элемент	124
§ 1. Описание элемента	124
§ 2. Анализ адаптивного способа	125
§ 3. Анализ встречного способа формирования данных	133
§ 4. Сравнительная оценка способов формирования данных	139
§ 5. Многомерный активный элемент	139
§ 6. Переоценка и прогноз	142
§ 7. Проблема синтеза законов стимулирования	144
Раздел II. ДВУХУРОВНЕВЫЕ АКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ	147
Глава VII. Основные понятия и определения	147
§ 1. Структурные элементы двухуровневой активной системы	147
§ 2. Описание активных элементов	148
§ 3. Учет будущего в критериях эффективности АЭ	149
§ 4. Описание АС в целом	151
§ 5. Активная система с независимыми активными элементами	151
§ 6. Описание центра и его действий	154
§ 7. Способы формирования данных	155
§ 8. Некоторые законы управления активными системами	156
§ 9. Критериальное управление	158
§ 10. Функционирование АС	159
§ 11. Обсуждение	160
Глава VIII. Задачи управления	161
§ 1. О решении игры активных элементов	161
§ 2. Игровое описание функционирования АС при встречном способе формирования данных	167
§ 3. Задачи управления АС при встречном способе формирования данных	170
§ 4. Задачи управления АС при адаптивном способе формирования данных	173
Глава IX. Задача выбора оптимального закона управления	178
§ 1. Гипотеза слабого влияния	178
§ 2. Класс G^1 законов управления. Анализ законов открытого управления	180
§ 3. Случай непланируемых реализаций и целевых функций АЭ без штрафов по ряду компонент	185
§ 4. О централизованном и децентрализованном управлении в АС	186
§ 5. Полная централизация в АС. Прогрессивные законы оптимального планирования	188
Глава X. Принцип согласованного управления	190
§ 1. Задача согласованного планирования	190
§ 2. Гипотеза слабого влияния	191
§ 3. Достаточные условия единственности гарантирующих стратегий для законов ОУ	192
§ 4. Достаточные условия единственности гарантирующей стратегии $s_i = r_i$ для законов СУ	194
§ 5. Анализ линейных целевых функций	196

Глава XI. Методы решения задач согласованного планирования	200
§ 1. Особенности задач согласованного планирования	200
§ 2. Примеры задач согласованного планирования	201
§ 3. Условия согласованности плана	203
§ 4. Определение согласованного управления	208
§ 5. Эписогласованные задачи	215
§ 6. Задачи согласованного планирования транспортного и распределительного типа	222
§ 7. Оценка целевой функции оптимального согласованного плана	223
§ 8. Метод локальной оптимизации	226
§ 9. Метод ветвей и границ	230
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	237
ПРИЛОЖЕНИЕ	239
КОММЕНТАРИИ	242
СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	248
ЛИТЕРАТУРА	250

Владимир Николаевич Бурков
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
АКТИВНЫХ СИСТЕМ

*Утверждено к печати
ордена Ленина Институтом проблем управления*

Редактор издательства В. М. Соклов
Художник В. В. Фирсова
Художественный редактор Н. Н. Власик
Технический редактор Л. В. Каскова
Корректоры М. Б. Амусьева, В. С. Федечкина

Сдано в набор 29/XII-1976 г.
Подписано к печати 12/IV-1977 г.
Формат 60×90^{1/16}
Бумага типографская № 1
Усл. печ. л. 16
Уч.-изд. л. 14,8
Тираж 3100
Т-08526
Тип. зак. 4413

Цена 1 р. 60 коп.

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21
2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10